



ОТВЕТ: в (б) нет, в (а) — поворот, направление оси  $(0, 1, 1)$ , косинус угла  $\frac{3}{5}$ , в (в) композиция поворота с отражением, направление оси  $(-2, 4, 1)$ , косинус угла  $\frac{5}{7}$ .

**ПК5♦4.** Для оператора  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , имеющего в стандартном ортонормальном базисе

а) матрицу  $\begin{pmatrix} -26/27 & 28/27 & 22/27 \\ -2/27 & -2/27 & -44/27 \\ -47/27 & -20/27 & -8/27 \end{pmatrix}$ , найдите полярное разложение  $F = SG$ , где  $S$

самосопряжён и положителен, а  $G \in O_3(\mathbb{R})$

б) матрицу  $\begin{pmatrix} 64/27 & 22/27 & 44/27 \\ -13/27 & 74/27 & -14/27 \\ -26/27 & -14/27 & 53/27 \end{pmatrix}$ , найдите полярное разложение  $F = GS$ , где  $G \in O_3(\mathbb{R})$ , а  $S$  самосопряжён и положителен.

где  $F^t F$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 22t^2 + 153t - 324 = (t - 9)^2(t - 4)$ .

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 11/27 & -1/27 & -2/27 \\ -1/27 & 19/54 & 1/27 \\ -2/27 & -2/27 & 11/27 \end{pmatrix}, \quad F^t F = \begin{pmatrix} 61/9 & 10/9 & 20/9 \\ 10/9 & 76/9 & -10/9 \\ 20/9 & -10/9 & 61/9 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 22/27 & 7/27 & 14/27 \\ -7/27 & 26/27 & -2/27 \\ -14/27 & -2/27 & 23/27 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 23/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 26/9 & -2/9 \\ 4/9 & -2/9 & 23/9 \end{pmatrix}$$

где  $F^t F$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t - 4)^2(t - 1)$ . В (б)

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix}, \quad F^t F = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -14/27 & 22/27 & 7/27 \\ -2/27 & 7/27 & -26/27 \\ -23/27 & -14/27 & -2/27 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: в (а)

**ПК5♦5.** Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений для линейного отображения  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , имеющего в стандартных ортонормальных базисах матрицу

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -8/9 & -4/9 & 10/9 \\ 2/3 & 4/9 & 14/9 & -11/9 \\ -4/3 & -10/9 & 16/9 & 2/9 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} 41/18 & -7/18 & -5/18 & 1/6 \\ -11/18 & 19/18 & -25/18 & -13/6 \\ 31/18 & 25/18 & -13/18 & -1/6 \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} -2/5 & 19/15 & -6/5 & -2/15 \\ 6/5 & -2/15 & -2/5 & 31/15 \\ 2/5 & -2/15 & 8/5 & 22/15 \end{pmatrix}$  г)  $\begin{pmatrix} 11/18 & 13/18 & -23/18 & 5/6 \\ 13/18 & -37/18 & -19/18 & 1/6 \\ -11/18 & 6/5 & 6/5 & -5/3 \end{pmatrix}$

ОТВЕТ: В (а) в ортонормальных базисах пространств  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^3$ , образованных столбцами матрицы  $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  оператор  $F$  имеет диагональную матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Матрица  $F^t F = \begin{pmatrix} 56/9 & 0 & 0 & -20/9 \\ -20/9 & 20/9 & -8/9 & -16/9 \\ 0 & -8/9 & 52/9 & -2 \\ 10/9 & -20/9 & -2 & 25/9 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^4 - 17t^3 + 88t^2 - 144t = t(t-9)(t-4)^2$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 56/9 & -10/9 & -20/9 & -20/9 \\ -10/9 & 41/9 & 10/9 & 56/9 \\ -20/9 & 10/9 & 10/9 & 56/9 \\ -20/9 & 10/9 & 10/9 & 56/9 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 17t^2 + 88t - 144 = (t-9)(t-4)^2$ . В (б) в ортонормальных базисах пространств  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^3$ , образованных столбцами

матрицы  $\begin{pmatrix} 1/6 & -5/6 & 1/2 & -1/6 \\ -5/6 & 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & -1/2 & -5/6 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  и оператора  $F$  имеет диагональную матрицу  $\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ .

столбцами матрицы  $\begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 & -1/5 & 4/5 \\ -4/5 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ -2/5 & 4/5 & -2/5 & 1/5 \\ -1/5 & -4/5 & -2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$  оператор  $F$  имеет диагональную матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 307/36 & 31/36 & 31/36 & -37/36 \\ 31/36 & 115/36 & -85/36 & -31/12 \\ -37/36 & -85/36 & 91/36 & 37/12 \\ 17/12 & -31/12 & 37/12 & 19/4 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^4 - 19t^3 + 99t^2 - 81t = t(t-9)^2(t-1)$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 49/9 & -16/9 & 32/9 & 32/9 \\ -16/9 & 73/9 & 16/9 & 16/9 \\ 32/9 & 16/9 & 49/9 & 49/9 \\ 32/9 & 16/9 & 49/9 & 49/9 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 19t^2 + 99t - 81 = (t-9)^2(t-1)$ . И (в) в ортонормальных базисах пространств  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^3$ , образованных

столбцами матрицы  $\begin{pmatrix} 44/25 & -18/25 & 16/25 & 44/25 \\ -18/25 & 41/25 & -42/25 & -16/25 \\ 16/25 & -42/25 & 104/25 & 42/25 \\ 78/25 & -16/25 & 42/25 & 161/25 \end{pmatrix}$  оператор  $F$  имеет хар. многочлен  $t^4 - 14t^3 + 49t^2 - 36t = t(t-9)(t-4)(t-1)$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 29/9 & -4/9 & -22/9 & -22/9 \\ -4/9 & 53/9 & 26/9 & 26/9 \\ -22/9 & 26/9 & 44/9 & 44/9 \\ -22/9 & 26/9 & 44/9 & 44/9 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 14t^2 + 49t - 36 = (t-9)(t-4)(t-1)$ . В (г) в ортонормальных базисах пространств  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^3$ , образованных столбцами матрицы  $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & -5/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/2 & -1/6 & -5/6 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  и оператора  $F$  имеет диагональную матрицу  $\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

гональную матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 43/18 & -31/18 & -20/9 & 8/3 \\ -31/18 & 91/18 & 14/9 & -20/9 \\ -20/9 & 14/9 & 55/18 & -13/6 \\ 8/3 & -2/3 & -13/6 & 7/2 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^4 - 14t^3 + 49t^2 - 36t = t(t-9)(t-4)(t-1)$ . Матрица  $F F^t = \begin{pmatrix} 29/9 & 4/9 & -22/9 & -22/9 \\ 4/9 & 53/9 & -26/9 & -26/9 \\ -22/9 & -26/9 & 44/9 & 44/9 \\ -22/9 & -26/9 & 44/9 & 44/9 \end{pmatrix}$  имеет хар. многочлен  $t^3 - 14t^2 + 49t - 36 = (t-9)(t-4)(t-1)$ .