Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com , до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

Задания с 16 занятия.

ВНИМАНИЕ! В этом задании все задачи, кроме первой, требуют более или менее однотипной работы с полярами, поэтому просьба присылать на проверку не более трех из них, выбирая те, которые показались самыми значимыми и интересными.

(1) На лекции было дано следующее определение кратности пересечения кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ с кривой $Y \subset \mathbb{P}^2$ в точке $a \in X \cap Y$ в случае, когда Y неособа в точке a. Мы доказывали, что в этом случае существует такая аффинная окрестность $U \subset Y$ точки a на Y, что максимальный идеал m_a точки a является главным в $\mathbb{K}[U]$. Тогда, если однородная форма F является уравнением кривой X, то ее ограничение $f = F|_Y$ на Y является регулярной функцией на некотором аффинном открытом множестве $V \subset Y$, и, следовательно, $f \in m_a \subset \mathbb{K}[U']$, где $U' = U \cap V$, и максимальный идеал m_a является, конечно, главным и в $\mathbb{K}[U']$. Тогда при некотором натуральном $k \in \mathbb{N} \quad f \in m_a^k$, но $f \notin m_a^{k+1}$ — это число k и называется кратностью пересечения кривых X и Y в точке a.

а) Покажите, что если обе кривые X и Y гладки в точке a, то определнная выше кратность их пересечения не изменится, если мы поменяем местами X и Y.

б) Покажите, что если обе кривые X и Y гладки в точке a, то кратность их пересечения в точке a равна 1 тогда и только тогда, когда $\mathbb{T}_a X \neq \mathbb{T}_a Y$. В этом случае говорят, что кривые X и Y пересекаются в точке a *трансверсально*.

(2) Докажите, что если a — неособая точка кривой $X \subset \mathbb{P}^2$, $l_a = \mathbb{T}_a X$ и $\check{l}_a \in \check{\mathbb{P}}^2$ является неособой точкой двойственной кривой $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^2$, то прямая двойственной плоскости $\check{a} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ является касательной к $\check{X}$ в точке $\check{l}_a$.

(3) Заполните пробелы в обсуждавшемся на занятии описании особых точек двойственной кривой $\check{X} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ при неособой $X \subset \mathbb{P}^2$:

а) Если прямая l касается неособой кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ ровно в двух точках a и b, не являющимися точками перегиба (такую касательную мы будем называть простой двойной касательной), то прямые $\check{a}$ и $\check{b}$ в двойственной плоскости пересекают двойственную кривую $\check{X}$ в точке $\check{l}$ с кратностью, большей 2. (То, что $\check{l}$ — двойная особая точка кривой $\check{X}$, было объяснено на занятии.)

б) Если прямая l касается неособой кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ ровно в одной точке a и кратность их пересечения в этой точке равна 3 (в этом случае мы будем говорить о простой точке перегиба) то точка $\check{l}$ лежит на двойственной кривой и является на ней острием, а прямая $\check{a}$ пересекает двойственную кривую $\check{X}$ в точке $\check{l}$ трехкратно.

(4) Покажите, что если a — двойная особая точка с разделенными касательными (т.е. узел) кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d, а точка b не лежит на касательных к ветвям X в точке a, то поляра $P_b X$ неособа в точке a и пересекает в этой точке кривую X с кратностью 2. [Указание: вычислите полярную конику $P_{a^{d-2}} X$ и воспользуйтесь равенством $\mathbb{T}_a P_b X = P_{a^{d-2}} P_b X = P_b P_{a^{d-2}} X$ аналогично тому, как это делалось на занятии в случае острия. См. также задачу 2 из задания 12.]