Семинар 4.

Во всех задачах $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$.

Пусть $\mathbb{P}^n$ – проективное пространство над $\mathbf{k}$, и Пусть

$$F(x) = F(x_0, ..., x_n) = \sum_{\substack{i_0+...+i_n=d \\ i_0,...,i_n \geqslant 0}} a_{i_0...i_n} x_0^{i_0} ... x_n^{i_n}$$

– однородный многочлен степени $\mathbf{d} > 0$ с коэффициентами $a_{i_0...i_n} \in \mathbf{k}$, и пусть

$$a = (a_0 : ... : a_n), \quad b = (a_0 : ... : b_n)$$

– точки в $\mathbb{P}^n$. Введем следующее обозначение для дифференциального оператора поляризации и его степеней:

$$D_a := \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad D_a^k := \underbrace{D_a \circ \cdots \circ D_a}_{k \text{ раз}} = (\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i})^k, \quad k \geqslant 1.$$

Задача 1. 1) Проверьте, что $D_a^k D_b^m F = D_b^m D_a^k F$ для любых $k, m \geqslant 1$.
2) Покажите, что оператор поляризации D_a не зависит от выбора координат $(x_0, ..., x_n)$.

Задача 2. Для произвольных $\lambda,\ \mu \in \mathbf{k}$ рассмотрим функцию $F(\mu a + \lambda b)$ как многочлен от λ при фиксированных $a,\ b$ и μ:

$$f(\lambda) := F(\mu b + \lambda a) = f(0) + \lambda \frac{df}{d\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k f}{d\lambda^k} + \cdots + \frac{\lambda^d}{d!} \frac{d^{\mathbf{d}} f}{d\lambda^{\mathbf{d}}}. \tag{1}$$

1) Проверьте равенства

$$\frac{df}{d\lambda} = (\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i})\Big|_{x=\mu b} = \mu^{\mathbf{d}-1} (D_a F(x))\big|_{x=b} = \mu^{\mathbf{d}-1} (D_a F)(b).$$

2) Итерируя эти равенства, перепишите (1) в виде:

$$f(\lambda) = \mu^{\mathbf{d}} F(b) + \frac{\mu^{\mathbf{d}-1}\lambda}{1!} (D_a F)(b) + \cdots + \frac{\mu^{\mathbf{d}-k}\lambda^k}{k!} (D_a^k F)(b) + \cdots + \lambda^{\mathbf{d}} F(a) \tag{2}$$

3) Получите отсюда, что

$$\frac{(D_a^k F)(b)}{k!} = \frac{(D_b^{\mathbf{d}-k} F)(a)}{(\mathbf{d}-k)!}. \tag{3}$$

Определение. *k-**ой полярой** точки $a \in P^n$ относительно гиперповерхности $X := \{F(x) = 0\}$ степени $\mathbf{d} = \deg X$ в P^n называется множество*

$$P_a^k(X) := \{x \in P^n \mid (D_a^k F)(x) = (\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i})^k (x) = 0\} \tag{4}$$

Явное уравнение поляры имеет вид:

$$0 = (D_a^k F)(x) = (D_x^{\mathbf{d}-k} F)(a) = \sum_{0 \leqslant i_1, ..., i_{\mathbf{d}-k} \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_{\mathbf{d}-k}} \frac{\partial^{\mathbf{d}-k} F}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{\mathbf{d}-k}}}(a).$$

Если не все частные производные $\frac{\partial^{\mathbf{d}-k} F}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{\mathbf{d}-k}}}(a)$ обращаются в нуль, то k-ая поляра $P_a^k(X)$ есть гиперповерхность степени $\deg P_a^k(X) = \mathbf{d} - k$ в $\mathbb{P}^n$. В противном случае согласно (4) полагаем $P_a^k(X) = \mathbb{P}^n$.

Задача 3. Докажите следующие свойства поляр:
1) $P_a^k(P_b^m(X)) = P_b^m(P_{a^k}(X)), \quad k, m \geqslant 1;$
2) $P_a^k(P_a^m(X)) = P_a^{k+m}(X)), \quad k, m \geqslant 1;$
3) $b \in P_a^k(X) \quad \Longleftrightarrow \quad a \in P_b^{\mathbf{d}-k}(X).$

Пусть $b \in X$. Тогда из (4) следует, что

$$b \in P_a(X) \cap X \quad \Longleftrightarrow \quad \{ \ (\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i})(b) = 0 \ \} \cap \{F(b) = 0\} \tag{5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{\text{уравнение } f(\lambda) = 0 \text{ в } (1) \ \text{ имеет в точке } \lambda = 0 \text{ по крайней мере 2-кратный корень}\}. \tag{6}$$

Определение. *Проективная прямая $\mathbb{P}^1$ называется* ***касательной*** *к гиперповерхности X в точке $b \in X \cap \mathbb{P}^1$, если она либо лежит в X, либо кратность ее пересечения с X в точке b, понимаемая, как и в (6), как кратность корня $\lambda = 0$ соответствующего уравнения $f(\lambda) = 0$, не меньше 2.*

Определение. *Проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$ вида*

$$\mathbb{T}_a X := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x \textit{ лежит на какой-либо касательной проективнойй прямой к } X \textit{ в точке } a\}$$

называется ***касательным проективным пространством*** *к гиперповерхности X в точке $a \in X$.*

Задача 4. 1) Докажите, что для произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$ и произвольной точки $b \in P_a(X) \cap X$, $b \neq a$, где $P_a(X)$ - первая поляра точки a относительно гиперповерхности X, прямая $\mathrm{Span}(a, b)$ касается X в точке b. Тем самым, если $b \in X$, то

$$\mathbb{T}_b X = \{ \ a \in \mathbb{P}^n \mid b \in P_a(X) \cap X\}.$$

2) Получите отсюда, что

$$\mathbb{T}_b X = P_b^{\mathbf{d}-1}(X), \qquad b \in X.$$

3) Проверьте, что

$$\mathbb{T}_b X = \mathbb{T}_b P_b^k(X), \qquad b \in X, \quad 1 \leqslant k \leqslant \mathbf{d} - 1.$$