Семинар 6

Вопрос: верно ли, что $L_{X+Y} = L_X + L_Y$ для геометрического оператора Ли?

Кое-что об естественности

Обозначения: $X, Y, Z \ldots$ векторные поля на гладком многообразии. Маленькие греческие буквы обозначают дифференциальные формы. Буква F обозначает диффеоморфизм многообразия, а F^* – операцию pull-back на тензорных полях. Напомним, что на векторном поле эта операция выглядит так: $F^*(X)(m) = dF^{-1}(X(F(m))$, f обозначает функцию.

1. Доказать, что $F^*(Xf) = F^*(X)F^*(f)$.

2. Доказать, что $F^*(L_X Y) = L_{F^*(X)}F^*(Y)$.

3. Сформулировать и доказать естественность операции i_X.

Потоки

4. Написать формулу для потока постоянного векторного поля $X(m) = v$, $v \in \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

5. Та же задача для поля $X(m) = Am$, где A – фиксированный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$.

6. Написать формулу для потока векторного поля $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ на сфере $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ в координатах X, Y, Z (φ – угол, меняющийся в пределах от нуля до 2π).

Геометрический оператор Ли является дифференцированием алгебры Грассмана.

Доказательство формулы $L_X Y = [X, Y]$ $(*)$

7. Исходя из определения, покажите, что $L_X(\omega \wedge \tau) = L_X(\omega)\wedge\tau + \omega \wedge L_X\tau$.

8^*. Показать, что $L_X(\omega(Y)) = L_X(\omega)(Y) + \omega(L_X Y)$.

9. Вычислить $L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^q}\right)$ для векторного поля $X = \sum X_q \frac{\partial}{\partial x^q}$ (Совет: выбрать $\omega = dx^k$ и воспользоваться результатом задачи 8 и первомартовским вычислением $L_X(dx^k)$.

10. С помощью задачи 9 проверьте, что координатные записи правой и левой части формулы $(*)$ совпадают.