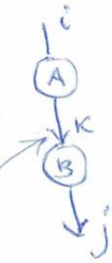
§2 Кососбратимые (skew-invertible) R-матрицы.

При работе с R-матричными представлениями приходится иметь дело с многоиндексными объектами. Для облегчения работы будем применять графические обозначения. Они же нам пригодятся и при построении инвариантов зацеплений. Сопоставим:

$\mathrm{End}(V) \in A \iff$  . В базисе: $A_{ij} \iff$ 

это линия пространства V

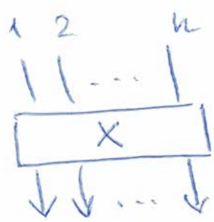
Произведение операторов: $A \cdot B \iff$  . В базисе: $\sum_k A_{ik} B_{kj} \iff$ 

Производится $\sum_k$ по стрелке, у которой нет открытого конца

Тождественный оператор: $Id_V \iff$  В базисе: $\delta_{ij} \iff$ 

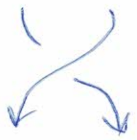
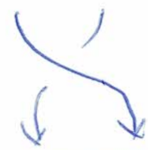
След оператора: $\mathrm{Tr}\, A \iff$  $\iff \sum_i A_{ii}$ (в базисе)

Операторы на $V^{\otimes n}$

$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \ni X \iff$ 

Особо нас интересуют R-матрицы: $R \in \mathrm{Aut}(V^{\otimes 2})$

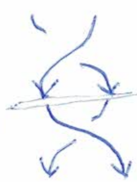
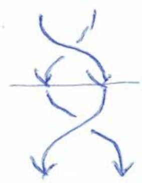
Для них специальные обозначения:

$R \Longleftrightarrow$  , $R^{-1} \Longleftrightarrow$  (1)

Так что тождества

$$R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = \mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_V \qquad (2а)$$

в картинках приобретает вид:

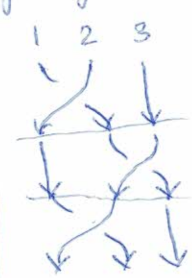
 =  =  (2б)

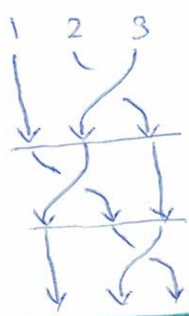
В теории узлов (зацеплений) такое равенство картинок называется 2-м движением Рейдемейстера.

Соотношение кос (уравнения Янга-Бакстера)

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23} \qquad (3а)$$

имеет графическое воплощение:



= 

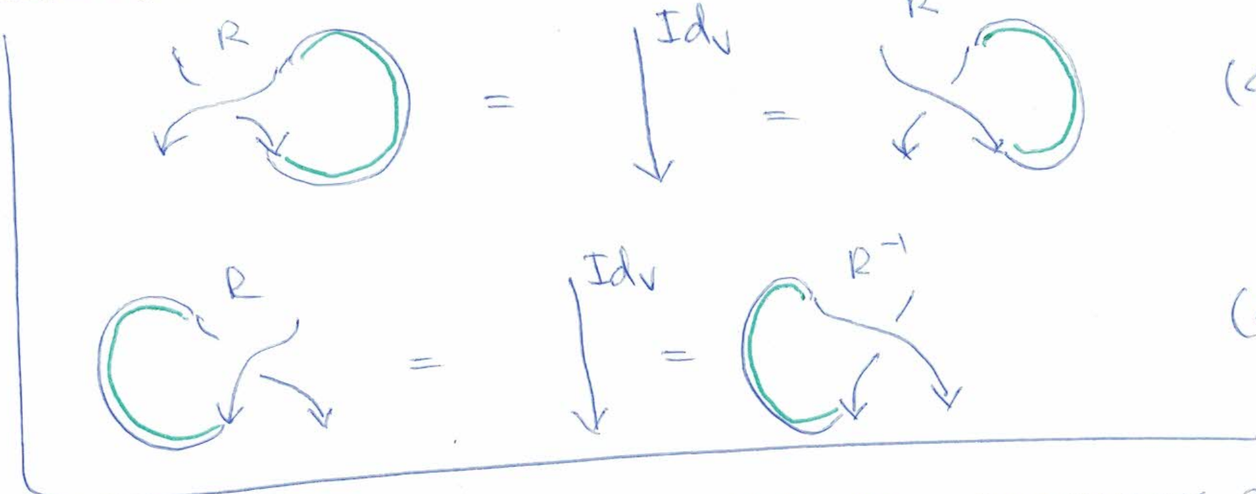
(3б)

в теории узлов именуемое 3-м движением Рейдемейстера.

Отметим, что здесь и далее мы используем обозначение X_{ij} $(i \neq j)$ для оператора, действующего как $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ в i-й и j-й компонентах тензорного произведения пространств V: $V^{\otimes n} = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, и тождественно на всех остальных компонентах. Здесь мы ввели индекс $i=1,\dots,n$ при обозначении компонент V пространства $V^{\otimes n}$ для удобства их идентификации.

Для приложения в теории узлов (и не только) нам надо построить алгебраические аналоги и для

1-го движений Рейдемейстера:



(4а)

(4б)

Замыкания линий, отмеченные на рисунках зелёным цветом подобны операции взятия следа. Действительно, в случае, когда $R = R^{-1} = P$ — оператор перестановки формулы (4а, б) выполняются, если считать

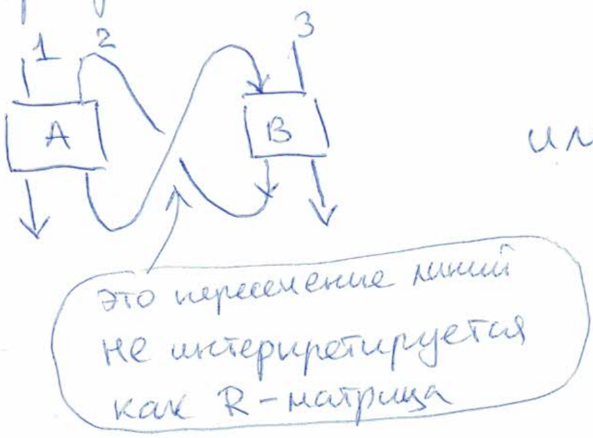
 $= Tr_{(1)}$,  $= Tr_{(2)}$.

Здесь $Tr_{(i)}$ — операция взятия следа в i-ой компоненте тензорного произведения $V^{\otimes n}$.

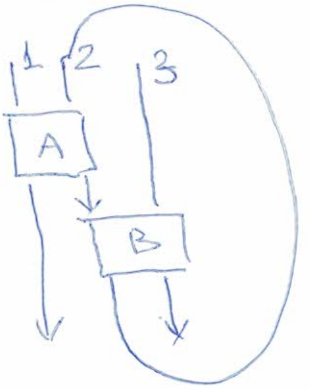
Однако, для R-матриц более общего вида такая интерпретация негодна. Наша задача:

построить аналог следа, для которого будут верны алгебраические аналоги картинок (4а, б), для широкого семейства R-матриц. Для этого нам потребуется ввести понятие косого умножения матриц $A, B \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$.

Графически косое умножение выглядит так:



или так:



,

а алгебраически так:

$$\boxed{(A \vartriangle B)_{13} := \mathrm{Tr}_{(2)} A_{12} B_{23}} \qquad (5)$$

Лемма Косое умножение (5)

а) ассоциативно

б) единица косого умножения — P_{12}

Док-ва: а) очевидно, например, из первой картинки.

Для доказательства б) нужно использовать свойства перестановки: Перечислим их все:

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{Tr}_{(1)} P_{12} = \mathrm{Id}_2, \quad \mathrm{Tr}_{(2)} P_{12} = \mathrm{Id}_1, \quad P_{12} A_{23} = A_{13} P_{12} \\ P_{12} = P_{21}, \quad P_{12}^2 = \mathrm{Id}_{V^{\otimes 2}}, \quad P_{23} A_{12} = A_{13} P_{23} \end{gathered}} \qquad (6)$$

Проверка (6) – упражнение.

Докажем б):

$$\mathrm{Tr}_{(2)} A_{12} P_{23} = \underbrace{\mathrm{Tr}_{(2)} P_{23}}\, A_{13} = Id_3\, A_{13} = A_{13} .$$

Значит P — правая единица для косого умножения. ∎

Так же проверяется, что P и левая единица.

<u>Def</u> Оператор $A \in End(V^{\otimes 2})$ называется кособратимым, если он обратим относительно косого умножения, т.е., если $\exists\, \Psi^A \in End(V^{\otimes 2})$:

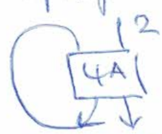
$$\boxed{\mathrm{Tr}_{(2)} A_{12} \Psi^A_{23} = P_{13} = \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi^A_{12} A_{23}} \qquad (7)$$

Здесь 2-е равенство выполнено автоматически, если выполнено левое.

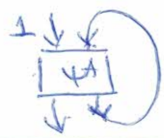
Обозначим C^A и D^A следующие, связанные с кособратимым A_{12} элементы $End(V)$:

графически

$$C^A_2 := \mathrm{Tr}_{(1)} \Psi^A_{12} \iff$$



$$D^A_1 := \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi^A_{12} \iff \qquad (8)$$



Ключевое свойство этих элементов

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{(1)} C^A_1 A_{12} &= Id_2 \\ \mathrm{Tr}_{(2)} D^A_2 A_{12} &= Id_1 \end{aligned}} \qquad (9)$$

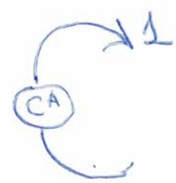
Оно следует из определений (7,8) и свойств перестановки (6). Свойство (9) <u>однозначно</u> определяет элементы C^A и D^A для $\forall$ кособратимого A (проверьте).

Формулы (9) — алгебраические аналоги картинок (4а,б), если идентифицировать

$\mathrm{Tr}_{(1)} C^A_1 \Longleftrightarrow$ 

, $\mathrm{Tr}_{(2)} D^A_2 \Longleftrightarrow$ 

Одна проблема: эта процедура задается индивидуально для каждого A. В частности, она может быть различна для R-матриц R и R^{-1}! С этим мы будем разбираться далее, а пока зафиксируем более корректные графические обозначения:

$\mathrm{Tr}^{left}_A := \mathrm{Tr}_{(1)} C^A_1 \Longleftrightarrow$ 

$\mathrm{Tr}^{right}_A := \mathrm{Tr}_{(2)} D^A_2 \Longleftrightarrow$ 

(10)

Исследуем свойства кособратных матриц при обращении R-матриц:

Утверждение 1 Если R — кособратимая R-матрица, то

$$C^R_1 \Psi^R_{12} = R^{-1}_{21} C^R_2, \quad \Psi^R_{12} C^R_1 = C^R_2 R^{-1}_{21} \quad (11a)$$

$$D^R_2 \Psi^R_{12} = R^{-1}_{21} D^R_1, \quad \Psi^R_{12} D^R_2 = D^R_1 R^{-1}_{21} \quad (11б)$$

Док-во. Используем при доказательстве соотношение кос в виде:

$$\boxed{R_{12}^{\varepsilon} R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = R_{23}^{-\varepsilon} R_{12} R_{23}^{\varepsilon}}\text{, где } \varepsilon = \pm 1 \quad (12)$$

1. Домножим (12) слева на Ψ_{01}^{R} и Ψ_{34}^{R} и вычислим $Tr_{(1,3)}$.

Преобразуем левую часть равенства:

$$Tr_{(1,3)} \Psi_{01}^{R} R_{12}^{\varepsilon} \Psi_{34}^{R} R_{23} R_{12}^{-\varepsilon} = Tr_{(1)} \Psi_{01}^{R} R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon}$$

Преобразуем правую часть:

$$Tr_{(1,3)} \Psi_{34}^{R} R_{23}^{-\varepsilon} \Psi_{01}^{R} R_{12} R_{23}^{\varepsilon} = Tr_{(3)} \Psi_{34}^{R} R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon}$$

Итак, получили

$$\boxed{Tr_{(1)} \Psi_{01}^{R} R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = Tr_{(3)} \Psi_{34}^{R} R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon}} \quad (13)$$

2. Вычислим отдельно $Tr_{(0)}$ и $Tr_{(4)}$ от этого равенства. С учетом свойств перестановки и определения (8) получим:

$$Tr_{(1)} C_1^{R} R_{12}^{\varepsilon} P_{24} R_{12}^{-\varepsilon} = Id_2 C_4^{R} \quad (14а)$$

$$Tr_{(3)} D_3^{R} R_{23}^{-\varepsilon} P_{02} R_{23}^{\varepsilon} = Id_2 D_0^{R} \quad (14б)$$

Далее, из (14а)/(14б) можно получить формулы (11а)/(11б), соответственно. Преобразования аналогичны. Мы преобразуем (14a)

3) Домножаем (14a) на P_{24} справа и используем св-ва перестановки

$$\boxed{Tr_{(1)} C_1^R R_{12}^{\varepsilon} R_{14}^{-\varepsilon} = C_4^R P_{24}.} \qquad (15)$$

Далее, выбор $\varepsilon = \pm 1$ приводит к двум соотношениям в (11a). Мы рассмотрим выбор $\varepsilon = 1$:

4) Домножаем (15) с $\varepsilon = 1$ на Ψ_{23}^R справа и вычислим $Tr_{(2)}$:

Преобразуем левую часть равенства:

$$Tr_{(1,2)} C_1^R R_{12} \Psi_{23}^R R_{14}^{-1} = Tr_{(1)} C_1^R P_{13} R_{14}^{-1} =$$

$$= Tr_{(1)} P_{13} R_{14}^{-1} C_1^R = Tr_{(1)} R_{34}^{-1} C_3^R P_{13} = R_{34}^{-1} C_3^R.$$

Здесь, переходя ко 2-й строке вычисления мы перенесли C_1^R направо, воспользовавшись циклическим свойством следа $Tr_{(1)}$, а затем перенесли перестановку P_{13} направо, применив ее свойства (6), и вычислили след.

Преобразуем правую часть равенства:

$$Tr_{(2)} C_4^R P_{24} \Psi_{23}^R = Tr_{(2)} C_4^R \Psi_{43}^R P_{24} = C_4^R \Psi_{43}^R$$

Окончательно получаем

$$\boxed{R_{34}^{-1} C_3^4 = C_4^R \Psi_{43}^R,}$$

что эквивалентно левому равенству (11a) ∎

Следствие 1 В условиях Утверждения 1

$$\boxed{C^R D^R = D^R C^R} \qquad (16)$$

Док-во: Вычислим $Tr_{(2)}$ от обоих равенств в (11а):

$$Tr_{(2)} C_1^R \Psi_{12}^R = C_1^R D_1^R = Tr_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R \quad \text{(левое 11а)}.$$

$$Tr_{(2)} \Psi_{12}^R C_1^R = D_1^R C_1^R = Tr_{(2)} C_2^R R_{21}^{-1} \quad \text{(правое 11а)}$$

В силу циклического свойства следа правые части равенств совпадают, откуда следует (16) ▨

Следствие 2 В условиях Утверждения 1

$$C_1^R C_2^R R_{12} = R_{12} C_1^R C_2^R \qquad (17а)$$

$$D_1^R D_2^R R_{12} = R_{12} D_1^R D_2^R \qquad (17б)$$

Док-во: Преобразуем выражение $D_1^R D_2^R R_{12}^{-1}$:

$$\underbrace{D_1^R D_2^R R_{12}^{-1}} \underset{\substack{(11б)\\ \text{правое}}}{=} \underbrace{D_1^R \Psi_{21}^R} D_1^R \underset{\substack{(11б)\\ \text{левое}}}{=} R_{12}^{-1} D_2^R D_1^R = R_{12}^{-1} D_1^R D_2^R$$

Мы таким образом доказали соотношение (17б) ▨

(17а) проверяется аналогично

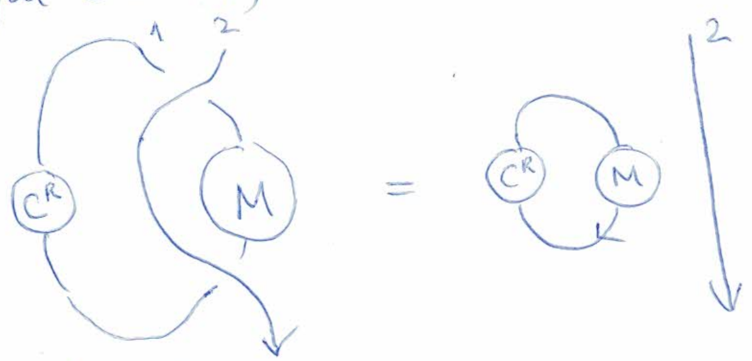
Следствие 3 Для всякого $\mathbb{C}$-линейного пространства W элемент $M \in End_W(V)$ — это матрица размера $\dim V \times \dim V$, компоненты которой являются элементами W. В условиях Утверждения 1 верны следующие равенства:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Tr}_{(1)}\, C^R_1 R^{\varepsilon}_{12} M_2 R^{-\varepsilon}_{12} = Id_2\, \mathrm{Tr}(C^R M) && (18а)\\ &\mathrm{Tr}_{(2)}\, D^R_2 R^{\varepsilon}_{12} M_1 R^{-\varepsilon}_{12} = Id_1\, \mathrm{Tr}(D^R M) && (18б)\end{aligned}}$$ 10

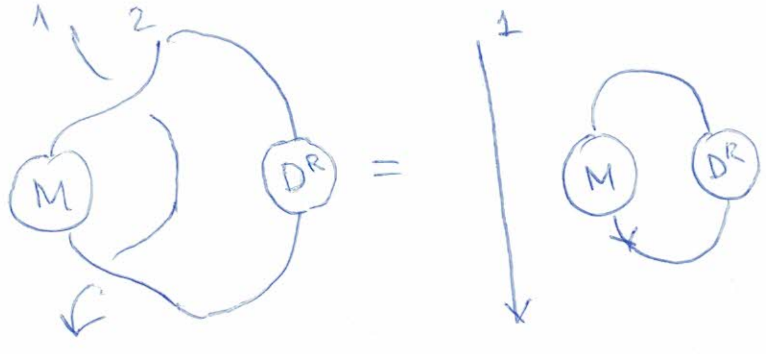
Доказательство этого следствия является задачей 3-го листка. Формулы (18а,б) выводятся из равенств (14а,б). Они им эквивалентны.

Формулы (18а,б) будут полезны в дальнейшем при исследовании свойств квантовых матричных алгебр (см. записки лекций П. Сапонова).

Графически соотношения (18а,б) выглядят так (при $\varepsilon = +1$):



(18а′)



(18б′)

Изучим теперь соотношение между матрицами C^* и D^* для кособратимых R-матриц R и R^{-1}.

Def Кособратимая R-матрица R называется строго кособратимой (strict skew-invertible), если хотя бы одна из матриц D^R или C^R обратимы.

Утверждение 2 Равносильны утверждения:

а) R – строго кособратимая R-матрица;

б) R-матрицы R и R^{-1} кособратимы.

В случае выполнения условий а) или б) имеем:

$$\boxed{C^{R^{-1}} = (D^R)^{-1}, \quad D^{R^{-1}} = (C^R)^{-1}} \qquad (19)$$

Док-во: а) $\Rightarrow$ б)

Предположим для определённости, что D^R обратима.

1 Домножим равенство $Tr_{(2)} R_{12} \Psi^R_{23} = P_{13}$ справа на D^R_3 и преобразуем:

Левая часть:

$$Tr_{(2)} R_{12} \underbrace{\Psi^R_{23} D^R_3}_{} \underset{\substack{(11б)\\ \text{правая}}}{=} Tr_{(2)} R_{12} D^R_2 R^{-1}_{32} = Tr_{(2)} R^{-1}_{32} R_{12} D^R_2$$

цикл. св-во следа

Итак, получим

$$Tr_{(2)} R^{-1}_{32} R_{12} D^R_2 = P_{13} D^R_3 = D^R_1 P_{13}$$

2 Домножим полученное равенство на $(D_1^R)^{-1}$ слева:

$$\mathrm{Tr}_{(2)} R_{32}^{-1} \underbrace{(D_1^R)^{-1} R_{12} D_2^R}_{\psi_{21}^{R^{-1}}} = P_{13}$$

Полученное равенство демонстрирует кособратимость R^{-1}, причем получаем выражение для $\psi^{R^{-1}}$:

$$\boxed{\psi_{12}^{R^{-1}} = (D_2^R)^{-1} R_{21} D_1^R} \qquad (20)$$

3 Домножим (20) на D_2^R слева и вычислим $\mathrm{Tr}_{(1)}$:

Левая часть: $\mathrm{Tr}_{(1)} D_2^R \psi_{12}^{R^{-1}} = D_2^R C_2^{R^{-1}}$

Правая часть: $\mathrm{Tr}_{(1)} R_{21} D_1^R \overset{(9)}{=} Id_2$

$\Longrightarrow$ Доказали левое равенство в (19)

б) $\Rightarrow$ а)

Пусть R и R^{-1} — кособратимые R-матрицы.

1 Преобразуем соотношение $\mathrm{Tr}_{(2)} \psi_{12}^R R_{23} = P_{13}$, домножив его слева на C_1^R.

Левая часть: $\mathrm{Tr}_{(2)} C_1^R \psi_{12}^R R_{23} \underset{\substack{(11a)\\ \text{левое}}}{=} \mathrm{Tr}_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R R_{23}$

Итак: $\mathrm{Tr}_{(2)} R_{21}^{-1} C_2^R R_{23} = C_1^R P_{13} = P_{13} C_3^R$

2 Домножим это равенство справа на $\psi_{10}^{R^{-1}}$ и вычислим $\mathrm{Tr}_{(1)}$

Левая часть: $\mathrm{Tr}_{(1,2)} R_{21}^{-1} \psi_{10}^{R^{-1}} C_2^R R_{23} \overset{(7)}{=} \mathrm{Tr}_{(2)} P_{02} C_2^R R_{23} =$

$$\overset{(6)}{=} \mathrm{Tr}_{(2)} C_0^R R_{03} P_{02} = C_0^R R_{03}$$

Правая часть: $\mathrm{Tr}_{(1)} \psi_{10}^{R^{-1}} P_{13} C_3^R \overset{(6)}{=} \mathrm{Tr}_{(1)} P_{13} \psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R = \psi_{30}^{R^{-1}} C_3^R$

В итоге получаем:

$$\boxed{C^R_0 R_{03} = \Psi^{R^{-1}}_{30} C^R_3} \qquad (21)$$

(3) Вычислим $Tr_{(0)}$ от этого равенства:

$$\begin{array}{ccc} Tr_{(0)} C^R_0 R_{03} & = & Tr_{(0)} \Psi^{R^{-1}}_{30} C^R_3 \\ \|(9) & & \|(8) \\ \end{array}$$

$$\boxed{Id_3 = D^{R^{-1}}_3 C^R_3}$$

Таким образом мы убедились в обратимости C^R_3 и $D^{R^{-1}}_3$ (т.е. доказали строгую кососбратимость R и R^{-1}), и получили правую формулу (19). Левая получается заменой $R \Leftrightarrow R^{-1}$ во всех рассуждениях выше. ▨

Rem: Формула (21) даёт ещё одну формулу для $\Psi^{R^{-1}}$ в случае строго кососбратимой R:

$$\boxed{\Psi^{R^{-1}}_{12} = C^R_2 R_{21} (C^R_1)^{-1}} \qquad (22).$$

Эта формула дополняет формулу (20)

Теперь мы можем разрешить проблему, обозначенную на стр. 6, и установить связь между $Tr_{(2)} D^R_2$ и $Tr_{(2)} D^{R^{-1}}_2$ ($Tr_{(1)} C^R_1$ и $Tr_{(1)} C^{R^{-1}}_1$) в случае гекковской R-матрицы R.

<u>Утверждение 3</u> Для строго кособратимой гекковской R-матрицы R выполняются соотношения:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\, D^R = \mathrm{Tr}\, C^R =: d} \qquad (23а)$$

$$D^R = (1-(q-q^{-1})d)\, D^{R^{-1}} \qquad (23б)$$

$$C^R = (1-(q-q^{-1})d)\, C^{R^{-1}} \qquad (23в)$$

<u>Док-во:</u> Соотношение Гекке, записанное в виде

$$R^{-1}_{12} = R_{12} - (q-q^{-1})\, Id_{12}$$

Домножим на D^R_2 и вычислим $\mathrm{Tr}_{(2)}$:

$$\mathrm{Tr}_{(2)} D^R_2 R^{-1}_{12} \overset{(9)}{=} (1-(q-q^{-1})\mathrm{Tr}\, D^R)\, Id_1$$

В силу однозначности задания матрицы $D^{R^{-1}}$ свойством (9) заключаем

$$D^R = (1-(q-q^{-1})\mathrm{Tr}\, D^R)\, D^{R^{-1}} \qquad (24а)$$

Аналогично выводится соотношение

$$C^R = (1-(q-q^{-1})\mathrm{Tr}\, C^R)\, C^{R^{-1}} \qquad (24б)$$

Равенство следов матриц C и D для любой (не обязательно строго-) кособратимой R-матрицы следует из их определения (8).

$\boxed{\diagup\!\diagup}$

<u>Rem</u> При калибровочных преобразованиях R-матриц: $R_{12} \mapsto \tilde R_{12} = (X_1 X_2)^{-1} R_{12} (X_1 X_2)$, $X \in \mathrm{Aut}(V)$ Ψ^R, C^R, D^R преобразуются так

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\Psi^R_{12} \longmapsto \tilde\Psi^R_{12} = (X_1 X_2)^{-1} \Psi^R_{12} (X_1 X_2),\\
&C^R \longmapsto \tilde C^R = X^{-1} C^R X^{-1},\\
&D^R \longmapsto \tilde D^R = X^{-1} D^R X,
\end{aligned}
}
\qquad (25)
$$

а значит C^R и D^R могут рассматриваться как элементы пространства $\mathrm{End}(V)$ ($\mathrm{Aut}(V)$ в случае строго кособратимой R), т.е. безотносительно выбора базиса в V.

В заключение параграфа получим явные выражения для матриц Ψ^R, C^R, D^R в случае Дринфельд-Джимбовской R_{DJ}:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&R_{DJ} = q\, e_{ii} \otimes e_{ii} + \underset{i \neq j}{x_{ij}\, e_{ij} \otimes e_{ji}} + (q - q^{-1})\, \underset{i<j}{e_{ii} \otimes e_{jj}}\\
&\text{где } x_{ij} x_{ji} = 1
\end{aligned}
}
\qquad (26)
$$

формула (10) из 1-й части записок по этой теме.

По индексам i и j подразумевается суммирование с указанными ограничениями (далее в формулах действует такое же соглашение).

Вместо того, чтобы решать задачу о косом обращении R_{DJ} в общем виде, сделаем разумное предположение о $\Psi^{R_{DJ}}$. Используем ансатц:

$$\boxed{\Psi^{R_{DJ}} = \alpha_i\, e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j}\beta_{ij}\, e_{ij}\otimes e_{ji} + \sum_{i<j}\gamma_{ij}\, e_{ii}\otimes e_{jj}},$$

т.е. у $\Psi^{R_{DJ}}$ ненулевые компоненты встречаются на тех же местах, что и у R_{DJ}. В этом предположении $D^{R_{DJ}}$ и $C^{R_{DJ}}$ – диагональные матрицы:

$$\boxed{D^{R_{DJ}} = d_i e_{ii}\ ,\quad C^{R_{DJ}} = c_i e_{ii}}$$

Определяющее D^R условие $Tr_{(2)} R_{12} D^R_2 = Id_1 = e_{ii}$ приводит к треугольной линейной системе

$$\boxed{q d_i + \sum_{j>i}(q-q^{-1}) d_j = 1\ , \quad i=1\ldots N},$$

которая имеет единственное решение

$$\boxed{D^{R_{DJ}} = \mathrm{diag}\{q^{-2N+1}, q^{-2N+3}, \ldots, q^{-3}, q^{-1}\}} \quad (27а)$$

Аналогично вычисляем

$$C^{R_{DJ}} = \mathrm{diag}\{q^{-1}, q^{-3}, \ldots, q^{-2N+3}, q^{-2N+1}\} \quad (27б)$$

$$\Psi^{R_{DJ}} = q^{-1} e_{ii}\otimes e_{ii} + \sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}}\, e_{ij}\otimes e_{ji} - \sum_{i<j}\frac{(q-q^{-1})}{q^{2(j-i)}}\, e_{ii}\otimes e_{jj} \quad (27в)$$

Как мы упоминали в 1-й части записок (17)
про R-матрицы, R_{DJ} — R-матрица $GL(N)$ типа:

$$\boxed{\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ N+1\\ \hline\end{array}}\right) = 0, \text{ причем } \operatorname{rk}\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ N\\ \hline\end{array}}\right) = 1} \qquad (28)$$

В дальнейшем нам потребуется явный вид проектора
$\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ N\\ \hline\end{array}}\right)$, поэтому сейчас давайте вычислим его,
и докажем соотношения (28).

Как мы знаем, идемпотент $\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ k\\ \hline\end{array}}\right)$ "вырезает"
в пространстве $V^{\otimes k}$ инвариантное подпространство
(прямой суммы одного или нескольких) одномерных
представлений $H_k(q)$ — $V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ k\\ \hline\end{array}}$, определяющим свойством
которых являются условия:

$$\boxed{\left(g_i + \frac{1}{q}\,Id\right) V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ k\\ \hline\end{array}} = 0.} \qquad (29)$$

Размерность этого инвариантного подпространства равна
рангу $\rho_{R_{DJ}}\left(P_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \vdots\\ k\\ \hline\end{array}}\right)$.

Будем искать векторы, удовлетворяющие условию
(29) в пространстве представления, порождаемого R_{DJ}:

$$\boxed{\left\{(R_{DJ})_{i\,i+1} + \frac{1}{q}\,Id\right\}\omega = 0, \text{ где } \omega \in V^{\otimes k}, \quad i = 1, \dots, k-1} \qquad (30)$$

<u>В случае $k=2$</u> $\omega \in V^{\otimes 2}$. Разложим ω по базису: $\omega = \sum_{i,j=1}^{N} \omega_{ij}\, v_i \otimes v_j$ (напомним действие матричных единиц: $e_{ij} v_k = \delta_{jk} v_i$). Поскольку R_{DJ} состоит из 1×1 и 2×2 блоков, уравнение (30) сводится к набору 1×1 и 2×2 линейных систем:

для каждого фиксированного $i = 1 \dots N$

$$\left(R_{DJ} + \frac{1}{q}\mathrm{Id}\right)\omega_{ii} v_i \otimes v_i = \omega_{ii}\left(q + \frac{1}{q}\right) v_i \otimes v_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{ii} = 0} \qquad (31a)$$

для каждой пары $1 \le i < j \le N$

$$\left(R_{DJ} + \frac{1}{q}\mathrm{Id}\right)\left(\omega_{ij} v_i \otimes v_j + \omega_{ji} v_j \otimes v_i\right) =$$

$$= \omega_{ij}\left(x_{ji} v_j \otimes v_i + (q - \tfrac{1}{q}) v_i \otimes v_j\right) + \omega_{ji}\left(x_{ij} v_i \otimes v_j\right) +$$

$$+ \frac{1}{q}\left(\omega_{ij} v_i \otimes v_j + \omega_{ji} v_j \otimes v_i\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{ji} = -\frac{q}{x_{ij}}\,\omega_{ij}} \qquad (31б)$$

Очевидно, (линейное пространство) решений системы (31а,б) имеет размерность $\frac{N(N-1)}{2}$ — это число пар $\{i,j\}: 1 \le i < j \le N$. То есть

$$\boxed{\mathrm{rk}\, \rho_{R_{DJ}}\left(P_{\boxed{\substack{1\\2}}}\right) = \frac{N(N-1)}{2}}$$

Этот проектор естественно называть <u>q-антисимметризатором в $V^{\otimes 2}$</u>.

Для $k=3$ условия (30) записываются для $(R_{DJ})_{12}$ и $(R_{DJ})_{23}$, действующих на $V^{\otimes 3}$. Они дают соотношения вида (31 а, б) для компонент $\omega \in V^{\otimes 3}$ из пар соседних пространств $V_1 \otimes V_2$ и $V_2 \otimes V_3$. Разложение решение по базису в результате имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j,\, j\neq k,\, i\neq k}}^{N} \omega_{ijk} v_i \otimes v_j \otimes v_k, \text{ где} \\ &\omega_{jik} = -\frac{q}{x_{ij}} \omega_{ijk} \quad \forall i,j: i<j \\ &\omega_{ikj} = -\frac{q}{x_{jk}} \omega_{ijk} \quad \forall j,k: j<k \end{aligned}}$$

Размерность пространства таких ω $\left(= rk\left(P_{\boxed{\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}}}\right)\right)$ равна числу троек $\{i,j,k\}: 1 \le i < j < k \le N$, т.е. равна $\binom{N}{3}$.

Аналогичным образом вычислим

$$\boxed{rk\, \rho_{R_{DJ}}\left(P_{\boxed{\begin{smallmatrix}1\\ \vdots\\ k\end{smallmatrix}}}\right) = \binom{N}{k}} \qquad (31)$$

Частными случаями этой формулы при $k=N, N+1$ являются равенства (28).

Единственный (с точностью до скалярного множителя) вектор ω — решение (30) при $k=N$ удобно записывается в случае $x_{ij}=1 \ \forall i,j$.

$$\boxed{\omega = \sum_{\sigma \in S_N} (-q)^{\ell(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(N)}} \qquad (32)$$

$\ell(\sigma)$ — длина перестановки σ

Коэффициенты вектора ω в разложении по базису $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_N}$:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_N} = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists \text{ пара } i_k = i_\ell \text{ при } k \neq \ell \\ (-q)^{\ell(\sigma)}, \text{ где } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ i_1 & i_2 & \dots & i_N \end{pmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

называются компонентами q-тензора Леви-Чивита (полностью q-антисимметричный тензор ранга N над N-мерным пространством V).

Матрица $\boxed{A^{(N)} := \rho_{R_{DJ}}\left(P_{\boxed{1 \dots N}}\right)}$, поскольку она имеет ранг 1, является произведением вектора и ковектора $\sim \omega \cdot \omega^*$, только ее следует правильно отнормировать, воспользовавшись свойством

$$\left(A^{(N)}\right)^2 = A^{(N)}$$

Ответ такой:

$$\boxed{\left(A^{(N)}\right)_{\underset{\text{индексы строчки}}{i_1 \dots i_N} \mid \underset{\text{индексы столбца}}{j_1 \dots j_n}} = q^{-\frac{N(N-1)}{2}} \frac{1}{[N]_q!} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N}} \quad (34)$$

так как

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_N} = q^{\frac{N(N-1)}{2}} [N]_q!,$$

где $[N]_q! = \prod_{i=1}^{N} [i]_q, \quad [i]_q := \dfrac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}$