

Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 3. R -МАТРИЦЫ И ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Рекомендуемый срок сдачи: 02.04.2024

1. Представление Бурау. Проверьте, что формулы

$$\begin{cases} g_i v_k &= q v_k, \quad \forall k \neq i, i+1, \\ g_i v_i &= (q - q^{-1}) v_i + x^{-1} v_{i+1}, \\ g_i v_{i+1} &= x v_i, \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

где $x, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, задают действие артиновых генераторов $g_i \in H_n(q)$ на n -мерном пространстве с базисом $\{v_k\}_{k=1, \dots, n}$. Постройте разложение этого представления в прямую сумму неприводимых 1-мерного и $(n-1)$ -мерного представлений. Каким диаграммам Юнга отвечают эти неприводимые представления?

2. Проверьте, что R -матрицы, действующие на тензорном квадрате двумерных (примеры а)-в)) или трехмерных (примеры г),д)) пространств, удовлетворяют соотношению кос $R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$.

Для R -матриц из примеров а)-г) проверьте, что они удовлетворяют соотношению Гекке $(R - qId)(R + q^{-1}Id) = 0$, и определите кратности собственных значений q и q^{-1} .

Для R -матрицы из примера д) убедитесь, что ее минимальный многочлен имеет вид $(R - qId)(R + q^{-1}Id)(R - q^2Id) = 0$, и определите кратности собственных значений.

Подсказка. Для упрощения вычислений можно воспользоваться соображениями, приведенными на стр.8 записок лекции про R -матричные представления группы кос. Допустимо также реализовать проверку с использованием программы Wolfram Mathematica.

а) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}$ — R -матрица Дринфельда-Джимбо, тип $GL(2)$.
Здесь и далее: $\lambda := q - q^{-1}$; в R -матрицах явно выписаны все компоненты нетривиальных диагональных матричных блоков; нулевые компоненты недиагональных блоков обозначены точками ".".

б) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}$ — R -матрица Кулиша-Склянина, тип $GL(1|1)$.

в) $R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & y \\ \cdot & \lambda & x & \cdot \\ \cdot & x^{-1} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -\frac{1}{q} \end{pmatrix}$ — R -матрица Риттенберга, тип $GL(1|1)$. Здесь параметры x и $y \neq 0$ не произвольны. Их следует выбрать так, чтобы выполнялось соотношение кос.

$$\Gamma)^{*1} R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & -\frac{x}{q} & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & q & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & \cdot & qx & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} = \begin{matrix} R\text{-матрица Креммера-Жерве, тип } GL(3). \\ \text{Здесь } x \neq 0. \end{matrix}$$

$$\Delta)^{*} R = \begin{pmatrix} q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{(q-1)\lambda}{q} & \cdot & \frac{\lambda y}{q} & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\lambda}{y} & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{q} & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix} = \begin{matrix} R\text{-матрица ортогонального типа } O(3). \\ \text{Она порождает серию } R\text{-матричных} \\ \text{представлений алгебр Бирман-} \\ \text{Мураками-Венцля } BMW_n(q, \mu = q^{-2}) \\ \text{(см. самый конец записок лекций по} \\ \text{алгебрам Гекке).} \end{matrix}$$

3. Для R -матриц из предыдущей задачи проверьте, что

- а) ядру R -матричного представления $H_3(q)$, порождаемого R -матрицей Дринфельда-Джимбо 2.а), принадлежит идемпотент, отвечающий разбиению $\{1, 1, 1\} \vdash 3$;
- б) ядру R -матричного представления $H_4(q)$, порождаемого R -матрицей Креммера-Жерве 2.г), принадлежит идемпотент, отвечающий разбиению $\{1, 1, 1, 1\} \vdash 4$;
- в)* ядрам R -матричных представлений $H_4(q)$, порождаемых R -матрицами Кулиша-Склянина и Риттенберга, принадлежат примитивные идемпотенты, отвечающие разбиению $\{2, 2\} \vdash 4$ (для каждой R -матрицы достаточно проверить утверждение для одного из примитивных идемпотентов).

Подсказка. Для упрощения вычислений можно применить метод, использованный в лекциях по R -матричным представлениям для вычисления рангов идемпотентов, отвечающих диаграммам-столбцам q -антисимметризаторов (см. стр.17-19 записок про косообратимые R -матрицы).

Допустимо также провести проверку с помощью Wolfram Mathematica, вычисляя выражения для идемпотентов в терминах элементов Юциса-Мерфи (см. лекции по алгебрам Гекке).

4. Для R -матриц из задачи 2 вычислите матрицы R -следа C^R и D^R .

5. Пусть $R \equiv R_{12} \in \text{Aut}(V \otimes V)$ — косообратимая R -матрица. V — \mathbb{C} -линейное пространство, $N = \dim V$.

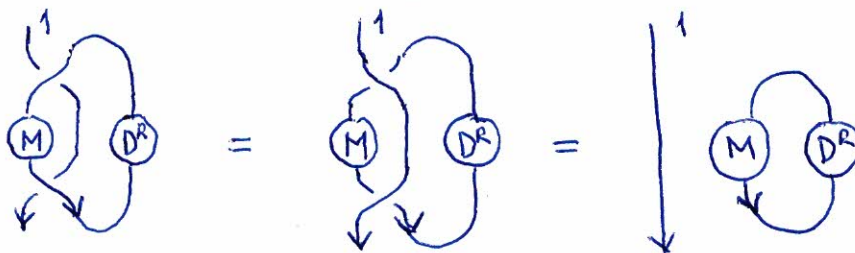
Пусть $M \in \text{Mat}_N(U)$ — произвольная $N \times N$ матрица, компоненты которой являются элементами некоторого \mathbb{C} -линейного пространства U . Докажите соотношения

$$\text{Tr}_{R(2)} \left(R_{12}^\varepsilon M_1 R_{12}^{-\varepsilon} \right) = \text{Id}_1 (\text{Tr}_R M), \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1, \quad \text{Tr}_R M := \text{Tr}(D^R M).$$

¹Задачи, помеченные значком * являются дополнительными.

Подсказка. Воспользуйтесь формулами (14а,б) со стр.7 записок про косообратимые R -матрицы.

Графически эти соотношения можно изобразить так:



6. Для всех изображенных на рисунках ниже ориентированных узлов/зацеплений L постройте косы, замыканием которых они являются, и вычислите инвариант HOMFLY-(PT) (см. записки лекции по инвариантам узлов/зацеплений, формулы (3), (4/4'), (10)). $P_L(x, \lambda)$

Для разных примеров можно провести вычисления как с помощью R -матричной техники, так и с использованием скейн-соотношений.

а) Зацепления Хопфа

1)



2)



б) Узел трилистник и его зеркальное отражение

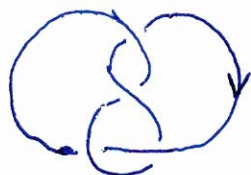
1)



2)



в) Узел "восьмерка"



г) Зацепление "узел Соломона"

