Семинар 5.

Во всех задачах char $\mathbf{k} = 0$.

Пусть $\mathbb{P}^n$ – проективное пространство над $\mathbf{k}$, $F(x) = F(x_0, ..., x_n)$ – форма (однородный многочлен) степени $\mathbf{d} > 0$ с коэффициентами в $\mathbf{k}$, и пусть $X = V(F)$ – гиперповерхность степени $\mathbf{d} > 0$ в $\mathbb{P}^n$.

Задача 1. Докажите, что для любой точки $a \in X$ верно включение $a \in P_a^k(X),\ k \geqslant 1$.

Дадим несколько определений. Пусть $n = 2$, то есть $X = V(F)$ – кривая в $\mathbb{P}^2$. В аффинных координатах $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ в $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ однородный многочлен $F(x_0, x_1, x_2)$ заменяем на неоднородный многочлен

$$f(x, y) = F(1, x, y) = f_0 + f_1(x, y) + f_2(x, y) + ... + f_{\mathbf{d}}(x, y), \tag{1}$$

где $f_i(x, y)$ - однородные слагаемые степени i многочлена $f(x, y)$. Здесь $f_0 = f(0, 0) = F(1, 0, 0)$, а $f_1(x, y) = \alpha x + \beta y$, где

$$\alpha = (\partial f/\partial x)(0, 0) = (\partial F/\partial x_1)(1, 0, 0), \quad \beta = (\partial f/\partial y)(0, 0) = (\partial F/\partial x_2)(1, 0, 0).$$

Определение. Точка $a \in X$ называется *особой точкой кратности m, где $m > 1$, на кривой* $X = \{F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$, если в (1) $f_i = 0$ для $0 \leqslant i \leqslant m - 1$. Аналогично можно дать определение особой точки и ее кратности для произвольной гиперповерхности X в $\mathbb{P}^n$. Нетрудно видеть, что особая точка a кратности $m > 1$ является особой в смысле данного ранее определения особой точки гиперповерхности как точки a, для которой $\mathbb{T}_a X = \mathbb{P}^2$.

Определение. Особая точка $a = (0, 0)$ называется *обыкновенной двойной точкой (с разделенными касательными)* кривой X, если в разложении (1) квадратичная форма

$$f_2(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad a_{ij} \in \mathbf{k}$$

невырождена, т.е. имеет ранг 2 (или, что то же самое, разлагается в произведение двух непропорциональных линейных форм L_1 и L_2 над $\mathbf{k}$).

Замечание. Если $a = (x_0, y_0)$ – обыкновенная двойная точка кривой X, и $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ – линейные формы, определяемые этой точкой, то прямые в $\mathbb{A}^2$

$$l_i := \{\ (x, y) \in \mathbb{A}^2\ | L_i(x - x_0, y - y_0) = 0\ \}, \quad i = 1, 2,$$

(и их проективные замыкания) имеют геометрический смысл касательных к двум (гладким) ветвям кривой X в точке a.

Задача 2. Пусть точка x – обыкновенная двойная точка кривой X, l_1 и l_2 – касательные к ветвям кривой X в точке x, и пусть a – общая точка плоскости $\mathbb{P}^2$, $a \notin X$. Докажите, что:
1) поляра $P_a(X)$ проходит через точку x и неособа в этой точке;
2) прямые l_1 и l_2 гармонически делят пару прямых $\mathrm{Span}(a, x)$ и $\mathbb{T}_x P_a(X)$.

Определение. *Полярная квадрика $Q_a(X)$ точки a относительно X* есть по определению $(\mathbf{d} - 2)$-ая поляра точки a относительно гиперповерхности X:

$$Q_a(X) := P_a^{\mathbf{d}-2}(X) = \{\sum_{i,j} \big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)\big) x_i x_j = 0\}, \quad \deg(Q_a(X)) = 2.$$

Заметим, что согласно задаче 1 верно, что

$$a \in X \quad \Longrightarrow \quad a \in Q_a(X).$$

При этом

$$\mathbb{T}_a(Q_a(X)) = P_a(Q_a(X)) = P_a(P_{a^{\mathbf{d}-2}}(X)) = P_{a^{\mathbf{d}-1}}(X) = \mathbb{T}_a(X).$$

Задача 3. Пусть X – гладкая кубическая кривая в $\mathbb{P}^2$. Для произвольной точки $a \in X$ рассмотрим полярную конику $Q_a(X)$. (Заметим, что поскольку X – кубика, то $Q_a(X)$ – первая поляра точки a относительно X.) Рассмотрим произвольную прямую l через точку a в $\mathbb{P}^2$, и пусть l пересекает кубику X (соответственно, конику $Q_a(X)$), помимо точки a, еще в двух точках b и c (соответственно, в точке d). Докажите, что пара точек a, d гармонически делит пару точек b, c.

Определение. Проективная прямая $l \subset \mathbb{T}_a(X)$ через точку a называется *касательной перегиба (flex)* к гиперповерхности $X = V(F)$ в точке a (а сама точка a в случае $n = 2$, т.е. когда X - кривая, называется *точкой перегиба* кривой X), если кратность пересечения l с X в точке a (обозначаемая $i(X, l)_a$) не меньше 3:

$$i(X, l)_a \geqslant 3.$$

Последнее условие означает, что для любой точки $b \in l$ верны равенства $D_b(a) = D_b^2(a) = 0$.

Задача 4. Докажите, что l – тогда и только тогда является касательной перегиба в точке a кривой X, когда $l \subset \mathbb{T}_a(X) \cap Q_a(X)$.

Дадим еще определение.

Определение. Пусть, как и выше, $X = V(F)$ – гиперповерхность степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^n$. Матрица

$$He(F) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right) \tag{2}$$

называется *матрицей Гессе* (или кратко *гессианом*) формы F. Гиперповерхность

$$He(X) = V(\det He(F)) = \{\ x \in \mathbb{P}^n \mid \det He(F) = 0\ \} \overset{(??)}{=} \{\ a \in \mathbb{P}^n \mid \text{квадрика } Q_a \text{ особа}\ \}$$

в $\mathbb{P}^n$ называется *гессианом гиперповерхности* X. Нетрудно видеть, что $\deg He(X) = (n+1)(\mathbf{d} - 2)$. В частности, если $n = 2$, то есть X кривая в $\mathbb{P}^2$, то кривая $He(X)$ имеет степень $3(\mathbf{d} - 2)$. Например, если X – кубика, то ее гессиан $He(X)$ – также кубика.

Задача 5. Докажите, что:
1) для произвольного $n \geqslant 1$ гессиан $He(X)$ имеет следующее описание:

$$He(X) = \{\ a \in \mathbb{P}^n \mid \text{полярная квадрика } Q_a(X) \text{ точки } a \text{ особа}\ \}.$$

2) Пусть X – гладкая кубика в $\mathbb{P}^2$, то

$$\{\text{множество точек перегиба кубики } X\} = X \cap He(X).$$