Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Как обычно, внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно присылать на почту alggem23@gmail.com , до 24:00 ВТОРНИКА перед следующим занятием.

Задания с 17 занятия.

(1) Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

(2) Эти два простые утверждения могут пригодиться при решении задачи 5.

  а) Докажите, что если $F(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ и $G(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ — однородные формы, $a \in V(F) \cap V(G) \subset \mathbb{P}^3$, точка a неособа на $V(F)$ и на $V(G)$, причем $\mathbb{T}_a V(F) \neq \mathbb{T}_a V(G)$, то точка a неособа на кривой $X = V(F) \cap V(G)$, причем $\mathbb{T}_a X = \mathbb{T}_a V(F) \cap \mathbb{T}_a V(G)$.

  б) Докажите, что если отображение $f : X \to \mathbb{P}^m$ кривой X, неособой в точке $a \in X$, является конечным, имеет степень 1 и дифференциал $d_a : T_a X \to d_a \mathbb{P}^m$ является невырожденным (т.е. в данном случае ненулевым), то кривая $f(X)$ неособой в точке $f(a)$.

(3) Докажите, что если $f : X \to Y$ — регулярное сюръективное отображение, Y неприводимо и все слои $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, имеют одну и ту же размерность и неприводимы, то X тоже неприводимо.

(4) Утверждения, доказываемые с помощью теоремы о размерности слоев, аналогичные обсуждавшимся на занятии.

  а) Докажите, что в пространстве $\mathbb{P}^N$, точки которого параметризуют все (с точностью до пропорциональности) однородные формы $F(x_0 : x_1 : x_2)$ степени d от 3 переменных ($N = \binom{d+2}{2} - 1$) имеется такое открытое подмножество $U_d \subset \mathbb{P}^N$, что

$$F \in U_d \quad \Leftrightarrow \text{ кривая } V(F) \text{ неособа,}$$

  причем множество особых кривых $\mathcal{S}_d = \mathbb{P}^N \setminus U_d$ является неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}^N$ коразмерности 1.

  б) Докажите, что в условиях предыдущей задачи в $\mathcal{S}_d$ имеется открытое подмножество, состоящее из кривых, имеющих только двойные особые точки.

в) Докажите, что в условиях пред-предыдущей задачи в множестве неособых кривых U_d имеется открытое подмножество $U_d^0 \subset U_d$, состоящее из таких кривых X, что касательная $\mathbb{T}_a X$ к X в любой точке $a \in X$ либо пересекает X трансверсально еще в $d-2$ точках, отличных от a, либо a является точкой перегиба и касательная $\mathbb{T}_a X$ пересекает X трансверсально еще в $d-3$ точках, отличных от a (мы это называли "простая точка перегиба"), либо $\mathbb{T}_a X$ касается X еще в одной точке и пересекает X трансверсально еще в $d-4$ точках (мы это называли "простая двойная касательная"). (Для таких кривых мы доказывали формулу Плюккера; на занятии мы доказали это утверждение в простейшем случае $d = 4$.)

(5) В конце занятия был рассказ про 27 прямых на кубике. В этой задаче мы отмечаем основные его этапы.

а) Рассмотрим неособую кубику $X \subset \mathbb{P}^3$, выберем точку $a \in X$ так, что полярная квадрика $P_a X$ неособа и через точку a не проходят прямые, лежащие на X. Докажите, что кривая $Y = X \cap P_a X$ неособа вне точки a.

б) В условиях предыдущей задачи докажите, что при проектировании $\pi_a : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ из точки a образом кривой $Y \setminus \{a\}$ является неособая (незамкнутая) кривая $Z^0 = \pi_a(Y \setminus \{a\})$ степени 4.

в) В условиях предыдущей задачи рассмотрим замыкание $Z = \overline{Z^0}$. Докажите, что $Z \setminus Z^0$ состоит из двух точек $b_1 = \pi_a(l_1)$ и $b_2 = \pi_a(l_2)$, где l_1 и l_1 — образующие квадрики $P_a X$, проходящие через точку a, причем квартика Z неособа в этих двух точках и прямая $m = \pi_a(\mathbb{T}_a X)$ является двойной касательной к Z в точках b_1 и b_2.

г) Докажите, что если прямая l лежит на кубике, т.е. $l \subset X$, то $\pi_a(l)$ являляется двойной касательной к Z, и, наоборот, любая двойная касательная к Z, кроме $m = \pi_a(\mathbb{T}_a X)$, получается таким образом.