Семинар 7

Подготовка к зачетной контрольной по темам: дифференциальные формы, интегрирование, потоки и оператор Ли, римановы метрики на многообразиях (первые шаги в лекциях 15 и 22 марта).

Стоит обратить внимание и на вычислительные задачи 6 семинара.

Формы, потоки, оператор Ли

1. Через p^t обозначим поток векторного поля X на многообразии M, и пусть f – гладкая функция на M. Докажите, что $f(p^t(m)) = f(m) + t(L_X(f))(m) + o(t)$.

2. Пусть X – левоинвариантное векторное поле на группе $GL(n, \mathbb{R})$. Напишите формулу потока этого поля. Убедитесь в глобальности этого потока. (Вопрос для желающих: в любой ли элемент группы можно проехать из единицы по траектории потока?)

3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ векторное поле V с координатами (y^2, z^2, x^2). Вычислить $L_V(dx \wedge dy \wedge dz)$.

4. Векторное поле X в $\mathbb{R}^n$ касается сферы S^m в каждой ее точке. Если α – это форма в $\mathbb{R}^n$ степени $(m+1)$, то форма $i_X(\alpha)$, ограниченная на сферу, равна нулю. Доказать.

Римановы метрики

1. Рассмотрим на прямой с координатой x риманову метрику $\tanh^2 dx^2$. Найти расстояние в этой метрике между точками 0 и 1.

2. На сфере (S^2, can) рассмотрим карту с координатами (x, y). Записать метрику can в этой карте.

3. На поверхности с метрикой $(du)^2 + 2(dv)^2$ найти угол между кривыми $2u = v, 2u = -v$.

4. Доказать, что меридианы и параллели поверхности вращения образуют на ней ортогональную сеть.

5. Найти (в индуцированной метрике) периметр и внутренние углы треугольника, ограниченного линиями $u = v^2, u = -v^2, v = 2$ на поверхности $(u \cos v, u \sin v, 2v)$ в $(\mathbb{R}^3, \mathrm{can})$.

6. Докажите, что дробно-линейное преобразование $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$, тогда и только тогда является изометрией плоскости Лобачевского, когда определитель матрицы g положителен.