

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Весна 2024г

Задачи про кубические кривые.

В нашем курсе мы обсуждали геометрию плоских кубик, но некоторые красивые геометрические факты были только упомянуты, им и посвящен приведенный ниже список задач. Геометрия кубических кривых обсуждалась на занятиях 10-13, см также задачи в заданиях с занятий 10 и 11. Для удобства мы приводим здесь краткий список того, что мы уже разобрали о геометрии кубик.

Неособая кубическая кривая имеет ровно 9 точек перегиба a_1, \dots, a_9 , причем эти 9 точек образуют систему Штейнера, изоморфную $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ — аффинной плоскости над полем из трех элементов. Конфигурация этих 9 точек единственна с точностью до проективного преобразования, поэтому любая неособая кубика на плоскости проективно эквивалентна одной из кривых этого пучка, классики называли его *сизигическим пучком*. Все кубики из сизигического пучка имеют точки перегиба в этих же 9 точках; гессиан любой кубики из сизигического пучка также принадлежит этому пучку. Если a_i — любая из девяти точек перегиба, а X — неособая кубика из сизигического пучка, то поляра $P_{a_i}X$ представляет собой распавшуюся конику, неособую в точке a_i , т.е. объединение двух прямых, одна из которых это касательная $\mathbb{T}_{a_i}X$, а вторая, которую мы обозначим l_i и будем называть *гармонической полярной* точки a_i .

- (1) Докажите, что гармоническая полярная l_i одна и та же для всех неособых кубик из сизигического пучка.
- (2) Докажите, что в сизигическом пучке ровно четыре особые кубики, каждая из которых представляет собой тройку прямых, "параллельных" в смысле геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.
- (3) Пусть \mathbb{P}^1 — база сизигического пучка, отметим на ней четыре точки, отвечающие особым кубикам. Докажите, что группа проективных преобразований \mathbb{P}^1 , сохраняющих эту четверку точек, есть знакопеременная группа A_4 . Каково двойное отношение этих четырех точек? Верно ли, что кубики, отвечающие точкам одной орбиты этого действия, проективно эквивалентны?
- (4) Докажите, что все кубики из сизигического пучка (в том числе и особые) неособы в точках a_1, \dots, a_9 , причем для любой прямой, проходящей через точку a_i существует ровно одна кубика из сизигического пучка, для которой эта прямая является касательной в точке a_i .

- (5) а) Докажите, что особенность поляр $P_{a_i}X$ (т.е. точка пересечения прямых $T_{a_i}X$ и l_i) лежит на гессиане $\text{He}(X)$ кривой X , причем $\text{He}(X)$ касается прямой $T_{a_i}X$ в этой точке.
- б) Выведите отсюда, что каждая неособая кубика из сизигического пучка является гессианом ровно трех кубик из сизигического пучка, причем все три эти кубики неособы, а каждая особая является гессианом самой себя и еще одной неособой кубики. Покажите, что в этом последнем случае неособая кубика проективно эквивалентна кубике Ферма $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0$.
- (6) Докажите, что если три точки перегиба, скажем, a_1, a_2, a_3 , лежат на одной прямой m , то их гармонические поляры l_1, l_2, l_3 пересекаются в точке пересечения двух других таких прямых, "параллельных" прямой m в смысле геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$. Выведите отсюда, что гармонические поляры l_1, \dots, l_9 образуют систему Штейнера в двойственной плоскости \mathbb{P}^2 .
- (7) Докажите, что для каждой точки перегиба a_i , $i = 1, \dots, 9$, проективная инволюция σ_i проективной плоскости \mathbb{P}^2 , оставляющая неподвижными точку a_i и гармоническую полярю l_i , переводит любую кубик из сизигического пучка в себя.
- (8) Опишите группу G проективных преобразований плоскости, переводящих в себя систему Штейнера a_1, \dots, a_9 . Очевидно, это подгруппа аффинной группы $\text{Aut}(\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3))$. Опишите подгруппу $H \subset G$ тех проективных преобразований, которые переводят в себя каждую кубик из сизигического пучка. Совпадает ли она с подгруппой в G , порожденной инволюциями $\sigma_1, \dots, \sigma_9$ из предыдущей задачи?
- (9) Как устроен гомоморфизм $G \rightarrow A_4$ (см задачу 3)?