Классическая теория поля 2024

Листок 3. Лагранжева формулировка и теорема Нётер

Срок сдачи: **18 апреля 2024**

---

1. Решения уравнения движения свободного массивного скалярного поля в 4-мерном пространстве Минковского с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2$$

раскладываются в сумму положительно и отрицательно частотных компонент:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} a^\pm(\vec{p})\,\frac{e^{\pm ip\cdot x}}{2p^0}\Big|_{p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}\frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

где $p\cdot x = p^\mu x_\mu$. Выразите сохраняющийся 4-вектор P^μ полной энергии и импульса поля ϕ в терминах амплитуд $a^\pm(\vec{p})$.

Напоминание: $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

2. В двумерном пространстве Минковского с метрикой $g = \mathrm{diag}(1,-1)$ задано скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{\beta^2}\,(1-\cos(\beta\,\phi)), \quad \beta > 0.$$

- **а)** Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде бегущей вправо волны $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.
- **б)** Пользуясь теоремой Нётер, вычислите *полную* энергию и импульс найденного в пункте а) решения.

3. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2}\partial_\mu\overline{\phi_i}\,\partial^\mu\phi_i.$$

Помимо пространственно-временных симметрий из группы Пуанкаре эта модель имеет и другие симметрии, называемые *внутренними.* Определите группу внутренних симметрий модели и найдите соответствующие сохраняющиеся Нётеровские токи.

4. В трехмерном пространстве Минковского с метрическим тензором $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$ задано действие для вещественного векторного поля $A_\mu(x)$, взаимодействующего с комплексным скалярным полем ϕ

$$S[A,\phi] = \int_{M_3} d^3x\left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \overline{\nabla^\mu\phi}\,\nabla_\mu\phi\right], \qquad \nabla_\mu := \partial_\mu - iqA_\mu,$$

где вещественная константа q — параметр взаимодействия, а $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — антисимметрический тензор третьего ранга, нормированный условием $\varepsilon^{012} = 1$.

- а) Проверьте, что действие $S[A,\phi]$ инвариантно относительно калибровочных преобразований полей вида:

$$A_\mu(x) \mapsto \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\,\alpha(x), \qquad \phi(x) \mapsto \tilde{\phi}(x) = e^{iq\alpha(x)}\phi(x).$$

- б) Напишите уравнения движения полей ϕ и A_μ.
- в) Найдите тензор энергии-импульса этой системы.