Механика 2024

Домашнее задание № 6

Срок сдачи задания: до конца дня **15.04.24**

---

1. Частица массы $m = 1$ скользит без трения по поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$ (модель сферического маятника). Определите силу реакции $\vec{N}$, действующую на частицу со стороны сферы, и выразите $\vec{N}$ в виде функции координат частицы и ее энергии. При решении задачи используйте метод множителей Лагранжа, введя в лагранжиан свободной частицы связь $f(\vec{r}) = R^2 - \vec{r}^2 = 0$.

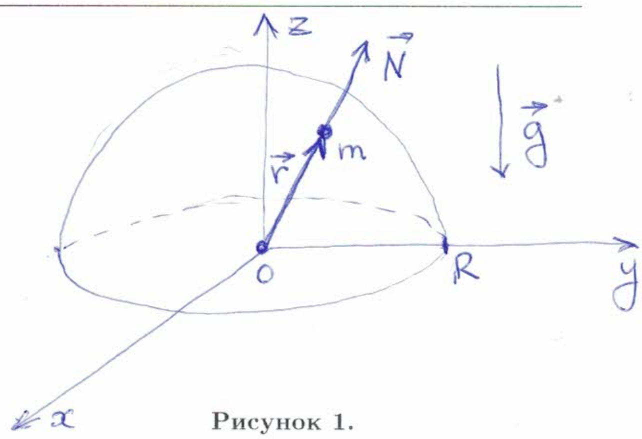

Рисунок 1.

2. Среди плоских кривых фиксированной длины $\ell > 2a$, начинающихся в точке $(-a, 0)$ и заканчивающихся в точке $(a, 0)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, найдите кривую, которая вместе с отрезком $[-a, a]$ оси абсцисс ограничивала бы наибольшую площадь (рис. 2). При решении задачи используйте метод множителей Лагранжа и ограничьтесь классом кривых, лежащих внутри полосы $x \in [-a, a]$ и задаваемых неотрицательными функциями $y(x) \in C^2[-a, a]$.

(Такого ограничения можно избежать, рассмотрев задачу в полярных координатах, однако решение вариационной задачи при этом станет более громоздким.)

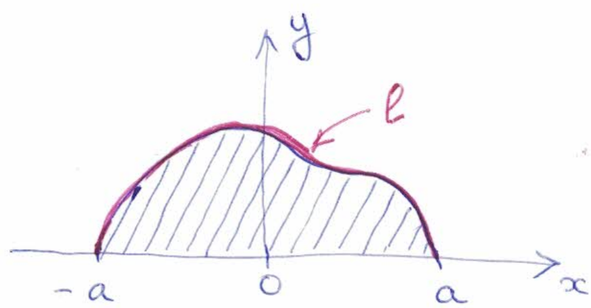

Рисунок 2.

а) Найдите общее решение дифференциального уравнения на экстремаль этой вариационной задачи (в нем множитель Лагранжа — один из параметров).

б) Найдите связь множителя Лагранжа λ и параметров задачи a и ℓ.

в) Предъявите явный вид решения $y(x)$ в случае $\ell = \pi a/\sqrt{2}$.

3. Движение заряженной частицы массы m и заряда e в пространстве $\mathbb{R}^3$ в поле расположенного в начале координат электрического диполя характеризуется лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - \frac{e(\vec{d}, \vec{r})}{r^3},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы, $r = |\vec{r}|$, $\vec{d}$ — постоянный вектор, называемый дипольным моментом.

а) Определите, какие из преобразований группы Галилея являются симметриями этой системы и постройте соответствующие нётеровские интегралы движения.

б) Докажите, что однопарамерическая группа преобразований

$$\Delta_\alpha : \quad \tilde{\vec{r}} = e^{\alpha}\vec{r}, \quad \tilde{t} = e^{2\alpha}t, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

является симметрией действия системы. Постройте отвечающий этой группе нётеров интеграл движения.

4. Движение материальной точки массы m вдоль оси $O\vec{x}$ в однородном силовом поле определяется лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx.$$

Докажите, что однопараметрическая группа преобразований

$$\Delta_\varepsilon : \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon$$

является симметрией действия системы и выпишите соответствующий нётеров интеграл движения.