

## Семинар 8

### 9 задач по гиперболической геометрии в модели Пуанкаре

(лекция о радугах 22 марта)

Ответы и решения можно посмотреть в учебнике Киселева

”Геометрия для старших классов гимназии” (издание 1893 года)

1. Докажите, что дробно-линейные преобразования верхней полуплоскости с метрикой Пуанкаре конформны, т.е. сохраняют евклидовы углы.

2\*. Докажите, что группа  $SL(2, R)$ , действующая дробно-линейными преобразованиями верхней полуплоскости с метрикой Пуанкаре, есть полная группа сохраняющих ориентацию изометрий модели.

### Радуги

3. Найти расстояние между точками  $i$  и  $4i$ . Найти середину отрезка с концами в этих точках и нарисовать ГМТ, равноудаленных от этих точек.

4. Найти расстояние от точки  $z = 1 + i$  до прямой  $x = 5$ .

5. Найти расстояние между прямыми  $x = 3$  и  $x = 5$ .

Евклидов диск, касающийся вещественной оси и лежащий в верхней полуплоскости, называется оришаром, а его граница – орициклом. Точка касания называется центром оришара, а евклидов диаметр диска называется высотой (=высоте орицикла).

### Радуги, оришары и орициклы

Пусть  $O(p/q)$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ , обозначает орицикл высоты  $1/q^2$  с центром в точке  $p/q$  (орицикл Форда).

6. Найти расстояние от точки  $i$  до орицикла  $O(3/5)$ .

7. Вычислить расстояние между орициклами  $O(3/5)$  и  $O(8/11)$ .

8. Конечна или бесконечна гиперболическая площадь оришара?

9. Доказать, что оришары, ограниченные орициклами Форда, не имеют общих внутренних точек. В каком случае они касаются?