# Теория функций комплексного переменного - 2024
## листок 7

**1.** С помощью интегральной формулы Коши вычислите интегралы (а) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^2-1}$, (б) $\displaystyle\int_{|z-a|=a}\frac{z dz}{z^4-1}$, $a>1$, (в) $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{ze^z dz}{(z-1)^3}$.

**2.** Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в верхней полуплоскости, непрерывно продолжаемая на вещественную ось, причем $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)=0$. Докажите интегральную формулу Шварца

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im} f(x)}{x-z}\,dx.$$

**3.** Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге, непрерывно продолжаемая на его границу. Докажите интегральную формулу Пуанкаре

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re} f(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta+i\mathrm{Im} f(0).$$

**4.** Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках: а) $\dfrac{zdz}{z^2+1}$, б) $\dfrac{e^z dz}{(z-1)^2}$, в) $\dfrac{zdz}{\sin^2 z}$, г) $\dfrac{z^{2n}dz}{(z-1)^n}$, д) $\dfrac{e^{1/z}dz}{1-z}$, е) $\sin z\,\sin(1/z)\,dz$, ж) $\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{\sin z\,(\sin z-z)}\,dz$ в точке $z=0$, з) $z^2\sin\dfrac{1}{z+1}\,dz$, и) $\dfrac{dz}{z(e^{2z}-1)}$ в точке $z=0$, к) $e^{z/(1-z)}dz$.

**5.** Докажите, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z)dz=-\mathrm{res}_{z=-a} f(z)dz$$

а для нечетной

$$\mathrm{res}_{z=a} f(z)dz=\mathrm{res}_{z=-a} f(z)dz$$

**6.** Вычислите интегралы: а) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{z^4dz}{e^z+1}$, б) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^z dz}{(2z+1)^2(z+2)}$, в) $\displaystyle\oint_{|z|=1}(z+1)e^{1/z}dz$, г) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z^3dz}{2z^4+1}$, д) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^3-1}{z-1}\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$, е) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{dz}{e^{2/z}-e^{1/z}}$, ж) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos z)}$, з) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z-(\log 2)^{-1}}{e^{1/z}-2}\,dz$.

**7.** Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании конечной области $D$, а точки $a_1,\ldots,a_n$ лежат в $D$ и попарно различны. Обозначим $P(z)=(z-a_1)\ldots(z-a_n)$ и

$$\Phi(z)=-\frac{P(z)}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\xi)}{P(\xi)}\frac{d\xi}{\xi-z},\quad z\notin D.$$

Докажите, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость и представляет собой многочлен степени $n-1$, причем $\Phi(a_k) = f(a_k)$, $k = 1, \ldots, n$. (Многочлен $\Phi(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа.)