Семинар 7.

Задача 1. Даны две кубические кривые X_1 и X_2, распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые X_1 и X_2 пересекаются в 9 различных точках. Докажите, что всякая кубика X, проходящая через 8 из этих точек, проходит и через 9-ую точку.

Задача 2. Пусть L – ненулевая линейная форма, а F – ненулевая форма степени $\geqslant 1$ от переменных $x_0 : ... : x_n$, и пусть $H = V(L)$ и $X = V(F)$ – гиперплоскость и гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ такие, что $H \subset X$. Докажите, что форма F делится на линейную форму L.

Задача 3. Пусть S - конечное множество, а $\mathcal{L} \subset 2^S$ – некоторая система подмножеств в S, удовлетворяющая следующим условиям: 1) любое подмножество $l \in \mathcal{L}$ состоит из 3 элементов, т. е. $|l| = 3$; оно называется *прямой*;
2) для любых двух различных точек $a, b \in S$ существует единственная прямая $l \in \mathcal{L}$, содержащая точки a и b. Пара $(S, \mathcal{L})$ с указанными свойствами называется *системой Штейнера.*
Докажите, что если X – гладкая кубика, то $X \cap He(X)$ – система Штейнера.

Задача 4. Докажите, что всякая система Штейнера S с $|S| = 9$ в плоскости $\mathbb{P}^2$ над полем $\mathbb{C}$ такая, что прямые из S реализуются прямыми в $\mathbb{P}^2$, единственна с точностью до проективного преобразования плоскости $\mathbb{P}^2$.

Задача 5. *Кубикой Ферма* называется плоская кубическая кривая $X = \{x^3 + y^3 = 1\}$.
1) Докажите, что кубика Ферма X неособа.
2) Найдите гессиан $He(X)$ и точки перегиба кубики Ферма X.