

Семинар 9

Геометрия Лобачевского

1. В модели Пуанкаре рассмотрим треугольник, две вершины которого лежат на границе модели, а внутренний угол при третьей вершине равен φ . Найти площадь треугольника.

2. Используя результат задачи 2, доказать, что площадь произвольного треугольника на плоскости Лобачевского равна π - (сумма его внутренних углов).

Римановы метрики на специальных поверхностях в $(\mathbb{R}^3, \text{can})$

3. Доказать, что на поверхности $Z = F(X, Y)$ матрица Грама индуцированной римановой метрики выглядит так:

$$g_{11} = 1 + F_x^2, g_{12} = g_{21} = F_x F_y, g_{22} = 1 + F_y^2.$$

4. Доказать, что на поверхности $Z = F(X, Y)$ площадь области T можно найти по формуле $\int_T \sqrt{(1 + F_x^2 + F_y^2)}$.

5. Найдите уравнение поверхности S в $(\mathbb{R}^3, \text{can})$, полученной вращением профиля $y = f(z)$, $f(z) \neq 0$, вокруг оси z .

6. Введите на поверхности S из задачи 5 координаты z, t по формулам $x = f(z) \cos t, y = f(z) \sin t, z = z$, и найдите вид римановой метрики на S в этих координатах.

Геодезические

7. Составьте дифференциальное уравнение геодезической на поверхности эллипсоида $X^2 + 4Y^2 + 9Z^2 = 1$.

8. Покажите, что кривая $X = \cos t, Y = \sin t, z = ct$ является геодезической на поверхности $X^2 + Y^2 = 1$.

9. Найдите все геодезические на этой поверхности.

10. Докажите, что кривые $t = \text{const}$ на поверхности S из задачи 5 являются геодезическими. Для каких значений z кривая $z = \text{const}$ будет геодезической?