Билинейные и квадратичные формы

ГЛ9◇1. Какими могут быть ранг и сигнатура ограничения невырожденной вещественной квадратичной формы сигнатуры (p, m) на векторное подпространство коразмерности 1?

ГЛ9◇2. Для каждого простого натурального $p > 2$ перечислите все анизотропные квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

ГЛ9◇3. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, и опишите такое линейное преобразование $Y \mapsto Y^?$ пространства $\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$, что поляризация формы det имеет вид $2\,\widetilde{\det}(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^?)$. Является ли форма det гиперболической?

ГЛ9◇4. Зафиксируем в пространстве W квадратичных форм от переменных (x_0, x_1) базис x_0^2, $2x_0x_1$, x_1^2 и свяжем с каждой 2×2 матрицей A линейный оператор $S^2A : W \to W$, переводящий $f(x_0, x_1)$ в $f(y_0, y_1)$, где $(y_0, y_1) = (x_0, x_1)\,A$. Напишите его матрицу в выбранном базисе и выразите её след и определитель через $\mathrm{tr}\,A$ и $\det A$.

ГЛ9◇5. Для $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ пусть $\det(tE - X) = t^n - \sigma_1(X)\,t^{n-1} + \sigma_2(X)\,t^{n-2} - \cdots$. Убедитесь, что $\sigma_2(X)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и вычислите её ранг и сигнатуру. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ9◇6. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 2, 3, 4$.

ГЛ9◇7. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 - x + 1)$ как трёхмерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_3$. Напишите матрицу Грама симметричной билинейной формы[1] $\mathrm{tr}(ab)$ в базисе $[1]$, $[x]$, $[x^2]$ и опишите все изотропные векторы этой формы.

ГЛ9◇8. Приведите пример таких пространства V с вырожденной ненулевой билинейной формой β и дополнительного к ядру левой корреляции $^{\wedge}\beta : V \to V^*$, $v \mapsto \beta(v, *)$, подпространства $U \subset V$, что ограничение формы β на U остаётся вырожденным.

ГЛ9◇9*. Пусть билинейная форма на пространстве V ограничивается в невырожденную форму на конечномерном подпространстве $U \subset V$. Постройте изометрический линейный изоморфизм[2] между ${}^{\perp}U$ и $U^{\perp}$.

ГЛ9◇10*. Докажите, что у канонического линейного оператора[3] $\varkappa$ невырожденной билинейной формы на n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем

а) характерстический многочлен $\chi_\varkappa(t) = (-t)^n \chi_\varkappa(t^{-1})$

б) для каждого $\lambda \neq \pm 1$ имеется сохраняющая размеры клеток биекция между жордановыми клетками с собственным числом λ и жордановыми клетками с собственным числом λ^{-1}

в) количества жордановых клеток каждого чётного размера с собственным числом $+1$ и каждого нечётного размера с собственным числом -1 всегда чётны[4].

ГЛ9◇11*. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль каждый невырожденный линейный оператор, удовлетворяющий условиям предыдущей задачи, является каноническим оператором для единственной с точностью до изометрического изоморфизма невырожденной билинейной формы.

[1] След умножения на $ab : K \to K$, $x \mapsto ab\,x$.

[2] Т. е. такой изоморфизм $f : {}^{\perp}U \xrightarrow{\sim} U^{\perp}$, что $\beta\big(f(v), f(w)\big) = \beta(v, w)$ для всех $v, w \in {}^{\perp}U$, где $\beta : V \times V \to \Bbbk$ — данная билинейная форма на V.

[3] Напомню, что этот оператор однозначно определяется тем, что $\beta(u, w) = \beta(w, \varkappa u)$ для всех u, w.

[4] Но могут быть и нулевыми.