Проективные пространства, подпространства, проекции, однородные и аффинные координаты

ГС14◇1. Сколько k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$ над полем из q элементов?

ГС14◇2. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в векторном пространстве V^* существует такой базис x_0, x_1, x_2, что каждая прямая ℓ_i является бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{v \in V \mid x_i(v) = 1\}$?

ГС14◇3. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки $A' = (1 : 0 : 0)$, $B' = (0 : 1 : 0)$ и $C' = (0 : 0 : 1)$ лежали, соответственно, на прямых (BC), (CA) и (AB), а прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекались в точке $(1 : 1 : 1)$.

ГС14◇4. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 1\}$, отвечающую ненулевому ковектору $\xi \in V^*$, и k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$ — проективизацию $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$. Убедитесь, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ наблюдается в аффинном пространстве U_ξ как k-мерное аффинное подпространство.

ГС14◇5. Пусть сумма размерностей двух непересекающихся проективных подпространств L_1 и L_2 в $\mathbb{P}_n$ равна $n - 1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \smallsetminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая ℓ, которая проходит через p и пересекает как L_1, так и L_2.

ГС14◇6. Напишите однородные уравнения проективных замыканий аффинных кривых:
а) $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$ **д)** $2xy = x^3 - y^3$,
а также их аффинные уравнения в двух других стандартных аффинных картах. Нарисуйте все эти 15 аффинных кривых в $\mathbb{R}^2$ и укажите их асимптотические направления[1].

ГС14◇7 (кубика Веронезе). Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}_3$ векторного пространства однородных кубических многочленов от двух переменных t_0, t_1. Кубика Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3$ состоит из всех ненулевых кубических многочленов, которые являются полными кубами линейных[2]. Опишите проекцию кубики Веронезе **а)** из точки t_0^3 на плоскость $\left(3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$ **б)** из $3\,t_0^2 t_1$ на $\left(t_0^3,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$ **в)** из $t_0 t_1 (t_0 - t_1)$ на $\left(t_0^3,\ 3\,t_0 t_1 (t_0 + t_1),\ t_1^3\right)$. А именно: (1) напишите параметрическое уравнение кривой-образа в однородных координатах на плоскости проекции (2) задайте эту кривую явным (непараметрическим) однородным уравнением (3) напишите аффинное уравнение кривой-образа в каждой из трёх стандартных аффинных карт (4) нарисуйте все 9 получившихся аффинных кривых в $\mathbb{R}^2$ (5) убедитесь, что кривая-образ в (а) имеет степень[3] 2, а в (б) и в (в) — степень 3, причём у кривой из (б) есть остриё в $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, а у кривой из (в) — самопересечение в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

ГС14◇8 (пифагоровы тройки). На плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{Q}^3)$ спроектируйте прямую $x_1 = 0$ из точки $(1 : -1 : 0)$ на конику $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$, т. е. для каждой лежащей на прямой точки $(t_0 : 0 : t_1)$ выразите координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ её проекции на конику в виде однородных многочленов от t_0, t_1. Убедитесь, что и наоборот, координаты $(t_0 : t_1)$ исходной точки являются однородными многочленами от координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ её проекции. Получите из этого описание всех целочисленных решений уравнения Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ с точностью до пропорциональности.

ГС14◇9. Найдите число решений уравнения $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ в векторном пространстве $\mathbb{F}_q^3$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов с $\operatorname{char} \mathbb{F}_q \neq 2$, а $f \in \mathbb{F}_q[x_0, x_1, x_2]$ однороден степени 2, в зависимости от ранга матрицы Грама квадратичной формы f и определителя Грама формы, индуцированной f на факторе $\mathbb{F}_q^3$ по ядру f.

---

[1] Т. е. точки, лежащие на бесконечности.

[2] Т. е. представимы в виде $(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)^3$ для некоторых $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$.

[3] Т. е. над алгебраически замкнутым полем пересекается ровно по двум точкам (с учётом кратности) с каждой прямой, которая не содержится в этой кривой целиком.