

Квадратичные формы

ГС13♦1. Выясните, вырождено ли ограничение билинейной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

на пространство U решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

в \mathbb{Q}^4 , и если нет, найдите проекцию вектора $v = (14, -3, 10, 8)$ на U^\perp вдоль U .

ГС13♦2. Найдите ранг и сигнатуру ограничения квадратичной формы, имеющей в стандартных координатах на \mathbb{R}^4 вид

$$-4x_1^2 - 25x_2^2 - 2x_3^2 - 11x_4^2 + 20x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 - 10x_2x_3 + 16x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

на ортогонал к вектору $v = (0, 3, 0, -7)$ относительно поляризации этой формы.

ГС13♦3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

- а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0$
- б) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$
- в) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0$
- г) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0$?

Если да, выясните, какой может быть её сигнатура, и предъявите явный пример такой матрицы Грама. Если нет, объясните, почему.

ГС13♦4. Для квадратичной формы $-5x_1^2 - 8x_2^2 - 21x_3^2 - 12x_1x_2 + 20x_1x_3 + 22x_2x_3$ на \mathbb{Q}^3 :

- а) укажите какой-нибудь ортогональный базис
- б) разложите \mathbb{Q}^3 в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств
- в) опишите все изотропные векторы.

ГС13♦5. Пусть в поле \mathbb{k} уравнение $x^2 = a$ разрешимо относительно x при любом $a \in \mathbb{k}$.

Покажите, что любая невырожденная квадратичная форма на \mathbb{k}^n при $n \geq 2$ обладает

- а) изотропным подпространством размерности $\lfloor n/2 \rfloor$
- б) парой трансверсальных¹ изотропных подпространств размерности $\lfloor n/2 \rfloor$.

ГС13♦6. Проверьте, что для анизотропного вектора e на пространстве с симметричной билинейной формой β отражение $\sigma_e : v \mapsto v - 2e\beta(v, e)/\beta(e, e)$ является инволютивным² изометрическим линейным изоморфизмом.

ГС13♦7. Покажите, что каждая изометрия невырожденной квадратичной формы над любым полем характеристики $\neq 2$ имеет определитель ± 1 .

ГС13♦8. Покажите, что число минусов (соотв. плюсов) в сигнатуре невырожденной вещественной квадратичной формы равно максимуму размерностей таких подпространств, на которых эта форма отрицательна³ (соотв. положительна⁴).

¹Т. е. имеющих нулевое пересечение.

²Т. е. обратным самому себе.

³Т. е. $q(u) < 0$ для всех ненулевых векторов u .

⁴Т. е. $q(u) > 0$ для всех ненулевых векторов u .