10 семинар

Еще раз об операторе Ли

1. Доказать, что $L_{fX}\omega = fL_X\omega + (Xf)\omega$, для любого векторного поля, любой гладкой функции и любой дифференциальной формы на многообразии.

Градиент, дивергенция, оператор Лапласа

2. Найти градиент функции в цилиндрической и сферической системах координат в $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$.

3. Найти дивергенцию векторного поля в $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$.

4. Та же задача 3, но для полярной системы координат в $(\mathbb{R}^2, \mathrm{can})$.

5. На ориентированном римановом многообразии M с канонической формой объема dV, $\int\limits_M \mathrm{div}X dV = 0$ для любого векторного поля X с компактным носителем. Доказать.

6. На римановом многообразии M $\mathrm{grad}f(g) = \mathrm{grad}g(f) = (\mathrm{grad}f, \mathrm{grad}g)$ для любых гладких функций f и g. Доказать.

7* Доказать, что оператор Лапласа Δ на компактном, ориентированном римановом многообразии самосопряжен, т.е. $\int\limits_M f\Delta g = \int\limits_M g\Delta f$, f, $g \in C^\infty(M)$.

Оператор Ходжа

8 (упражнение по линейной алгебре). Пусть E евклидово, ориеннтированное пространство. Доказать, что оператор Ходжа (оператор звездочка) устанавливает канонический изоморфизм k-той и (n-k)-той внешней степени пространства E.

9. Проверить, что оператор Ходжа на ориентированном римановом многообразии (M, g, ω_0) обладает следующими свойствами

а) $*1 = \omega_0, *\omega_0 = 1$,

б) $(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(n-k)}(*\alpha, \beta)$, $\deg\alpha = k$, $\deg\beta = (n-k)$.

10*. В ситуации задачи 9 доказать, что $*^2 = (-1)^{k(n-k)}\mathrm{id}$.