

## Классическая теория поля 2024

### Листок 4. Поля в волновой зоне и излучение

Срок сдачи: 15 мая 2024

---

1. Электромагнитное поле в пространстве  $\mathbb{R}^3$  задано 4-вектором потенциала следующего вида:

$$A^0 = 0, \quad \vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t.$$

Определите:

- а) Вектор плотности потока энергии в произвольной точке  $\vec{r}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  (вектор Умова-Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$ ).
  - б) Полную энергию за четверть периода  $0 < t < \pi/2\omega$ , прошедшую через поверхность цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $L$  с осью симметрии  $Oz$ . Геометрический центр цилиндра находится в начале координат.
2. Докажите, что для электромагнитного поля величина

$$W^2 - \frac{1}{c^2} |\vec{S}|^2$$

является лоренцевым инвариантом. Здесь  $W$  — плотность энергии поля,  $\vec{S}$  — вектор Умова-Пойнтинга (вектор плотности потока энергии).

3. Рассмотрим *замкнутую* (то есть, не подверженную действию внешних сил) конечную систему из  $N$  массивных заряженных частиц, у которых отношение массы к заряду одинаково для всех частиц:

$$\frac{m_k}{q_k} = \alpha = \text{const}, \quad 1 \leq \forall k \leq N.$$

Докажите, что в такой системе отсутствует электрическое дипольное излучение при любом движении частиц.

**Указание.** Вспомните определение центра масс системы материальных точек и учтите характер движения центра масс замкнутой системы.

4. Заряд  $q$  колеблется вдоль оси  $Oz$  вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R \cos(\omega t).$$

Полагая  $R\omega \ll c$  ( $c$  — скорость света), найдите:

- а) Напряженности электрического и магнитного полей, создаваемых этим зарядом в областях пространства, удаленных на расстояние  $r \gg c/\omega$  (волновая зона), в первом исчезающем порядке по отношению  $v/c$ , где  $v$  — скорость заряда.
  - б) Усредненную по периоду колебаний плотность потока излучения как функцию угла  $\theta$  между направлением в точку наблюдения и положительным направлением оси  $Oz$ .
5. Тонкий обруч радиуса  $R$  изготовлен из непроводящего материала. На дугу обруча с центральным углом  $\alpha$  нанесен заряд  $Q$  с постоянной линейной плотностью распределения по дуге. Обруч равномерно вращается в своей плоскости вокруг оси, проходящей через его геометрический центр перпендикулярно плоскости обруча. Угловая скорость вращения  $\omega$ .

- а) Найдите вектор дипольного момента  $\vec{d}(t)$  этой системы.
- б) Найдите полную мощность излучения во всех направлениях в дипольном приближении.