

Семинар 9.

Задача 1. Докажите, что всякая гладкая кубика в сизигическом пучке кубик является гессианом трех кубик пучка.

Задача 2. Как мы знаем из конфигурации множества точек перегиба гладкой кубики, в сизигическом пучке кубик имеются 4 полностью распавшиеся кубики. Существуют ли в этом пучке другие кубики с особенностями.

Задача 3. Пользуясь пучком кубик, натянутым на две полностью распавшиеся кубики, докажите теорему Паскаля (либо обратную к ней).

Задача 4. Попробуйте обосновать, что гладкая кубика над полем \mathbb{C} биективна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 5. Под j -инвариантом гладкой кубики X понимается выражение $j(X) = S(\lambda)$, где $S(\lambda) := 1728 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$, а λ - двойное отношение взятых в произвольном порядке четырех касательных прямых к X , проведенных из произвольной точки $a \in X$.

(i) Докажите, что выражение $j(X)$ не зависит от порядка, в котором пронумерованы касательные через точку a .

(ii) Докажите, что выражение $j(X)$ не зависит от точки $a \in X$.

(iii) Докажите, что $j(X)$ совпадает с выражением $S(\lambda)$, где число λ взято из уравнения кривой X в форме Вейерштрасса $y^2 = ax(x-1)(x-\lambda)$, $a \neq 0$.