

Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 5. СТРУКТУРА АЛГЕБРЫ ХОПФА

Рекомендуемый срок сдачи: 8 мая 2024

Вся информация, необходимая для решения приведенных ниже задач, содержится в конспекте лекции “Алгебры Хопфа: определения и примеры”, который размещен на Интернет-странице курса.

1. Докажите корректность определения структур алгебры Хопфа для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы G и алгебры $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на этой групповой алгебре. Докажите также, что эти алгебры Хопфа дуальны друг другу относительно билинейной формы

$$\langle f, v \rangle = f(v), \quad f \in \text{Fun}_{\mathbb{K}}(G), \quad v \in \mathbb{K}[G].$$

Указание. Все необходимые определения даны в конспекте лекций в формулировках Утверждений 3.2, 3.3 и 3.4.

А именно, проверьте явным вычислением следующее:

- а) Отображения Δ_G, ε_G и Δ_F, ε_F являются гомоморфизмами, а отображения S_G и S_F — антигомоморфизмами.
- б) Для всех операций в алгебрах Хопфа $\mathbb{K}[G]$ и $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ выполнены аксиомы определения алгебры Хопфа.
- в) Операции в алгебре Хопфа $\mathbb{K}[G]$ связаны с операциями в алгебре Хопфа $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ посредством билинейной формы в соответствии с Определением 2.3 (см. конспект лекции, стр. 16.)

2. На примере структур алгебры Хопфа в универсальной обертывающей алгебре Ли найдите связь следующих композиций отображений

$$(S \otimes S) \circ \Delta \quad \text{и} \quad \Delta \circ S,$$

а также вычислите значение композиции отображений $\varepsilon \circ S$ на произвольном элементе универсальной обертывающей. Здесь Δ, ε и S являются, соответственно, отображениями коумножения, коединицы и антипода.

Проверьте выполнение найденных формул для двух других примеров алгебр Хопфа: для групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ конечной группы G и для алгебры $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ линейных функций на групповой алгебре группы G .

3. Пусть $\hat{T} : G \rightarrow \text{End}(V)$ представление конечной группы G в конечномерном линейном \mathbb{K} -пространстве V . Пользуясь структурой алгебры Хопфа на групповой алгебре $\mathbb{K}[G]$, постройте представление G в линейном пространстве $\text{End}(V) \simeq V \otimes V^*$.