Пуассоновы структуры на коммутативной алгебре

Дальнейшие наши лекции будут посвящены структуре и теории представлений специального класса некоммутативных алгебр — так называемых квантовых групп и, если позволит время, более общих объектов — квантовых матричных алгебр. Все наши примеры таких алгебр возникают из квантования коммутативной алгебры функций на матричной алгебре, снабженной различными пуассоновыми структурами.

Идейно процедура квантования заключается в переходе от коммутативной алгебры к некоммутативной с соблюдением ряда условий. Одним из этих условий является так называемый "классический предел", который позволяет восстановить исходную коммутативную алгебру из квантовой при стермлении параметра квантования к нулю. "Управляет" процедурой квантования пуассонова структура (или скобка Пуассона) на коммутативной алгебре.

Типичным примером является квантование механической системы и переход от классической механики к квантовой. Здесь исходной коммутативной алгеброй является алгебра вещественнозначных функций на фазовом пространстве — наблюдаемых механической системы. Фазовое пространство, в свою очередь, часто представляет собой кокасательное расслоение на конфигурационном пространстве модели.

Одним из простейших примеров является система N материальных точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{3N}$ снабжается координатами q^i, фазовое пространство M отождествляется с $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$, координаты в слое — компоненты импульса p_i. Наблюдаемые системы — (гладкие) вещественнозначные функции от $6N$ переменных $f(q,p)$. Множество наблюдаемых образуют коммутативную алгебру $\mathcal{F}(M)$ относительно сложения и поточечного умножения функций.

Динамика системы определяется особой наблюдаемой — гамильтонианом $H(q,p)$, представляющим энергию системы. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Теперь динамическая эволюция любой наблюдаемой $f(q,p)$ задается дифференциальным уравнением:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) := \{f, H\}.$$

Здесь последнее равенство является определением билинейной антисимметрической операции на алгебре наблюдаемых, так называемой скобки Пуассона $\{\,,\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$.

Общее определение скобки Пуассона или пуассоновой структуры на коммутативной алгебре следующее.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем $\mathbb{K}$. Пуассонова структура на алгебре $\mathcal{F}$ это отображение $\{\,,\} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ (скобка Пуассона), удовлетворяющее следующим свойствам (ниже $f, g, h \in \mathcal{F}$ — произвольные элементы алгебры $\mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — элементы поля $\mathbb{K}$):

(i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ — антисимметричность.

(ii) $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ — линейность по первому аргументу, а следовательно, в силу (i), и линейность по второму аргументу.

(iii) $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \equiv 0$ — тождество Якоби.

(iv) $\{f, gh\} = \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\}$ — правило Лейбница.

Заметим, что первые три аксиомы (i)–(iii) превращают $\mathcal{F}$ в алгебру Ли.

Рассмотрим важный случай, когда коммутативная алгебра $\mathcal{F}$ представляет собой алгебру гладких функций на гладком многообразии M, $\dim M = n$. В этом случае общий вид пуассоновой структуры может быть описан с помощью так называемого пуассонова тензора. Пусть в некоторой области $U \subset M$ введены локальные координаты z^i, $1 \le i \le n$. Тогда, пользуясь правилом Лейбница (iv) можно показать, что в локальных координатах любая пуассонова структура имеет вид:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^i}\, \omega^{ij}(z)\, \frac{\partial g}{\partial z^j}.$$

Гладкие функции $\omega^{ij}(z) = \{z^i, z^j\}$ являются компонентами пуассонова тензора. Прямым вычислением легко проверяется справедливость следующего утверждения.

Утверждение. Антисимметричность скобки Пуассона и тождество Якоби приводит к следующим условиям на компоненты пуассонова тензора:

(а) $\omega^{ij}(z) = -\omega^{ji}(z)$;

(б) $\omega^{ia}(z)\partial_a\omega^{jk}(z) + \omega^{ka}(z)\partial_a\omega^{ij}(z) + \omega^{ja}(z)\partial_a\omega^{ki}(z) = 0$.

В уравнении пункта (б) применено сокращенное обозначение для частной производной $\partial_a = \partial/\partial z^a$ и по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование по всем его возможным значениям:

$$\omega^{ia}\partial_a\omega^{jk} := \sum_{a=1}^{n} \omega^{ia}\, \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial z^a}.$$

Таким образом, если $\omega = \|\omega^{ij}\|$ — постоянная антисимметрическая матрица, то свойство (б) удовлетворяется автоматически и поэтому любая постоянная антисимметрическая матрица задает некоторую пуассонову структуру. Рассмотренный выше пример механики частиц в евклидовом пространстве как раз из этой серии: приведенная скобка Пуассона задается постоянным тензором вида

$$\omega = \begin{pmatrix} O_{m\times m} & I_{m\times m} \\ -I_{m\times m} & O_{m\times m}, \end{pmatrix}, \quad m = 3N,$$

где O и I являются нулевой и единичной матрицами соотвтетственно. Переменные (q, p) называются каноническими.

Определение. Пуассонова структура называется невырожденной, если $\det \|\omega^{ij}(z)\| \neq 0$.

Поскольку для любой антисимметрической матрицы ω размером $n \times n$ справедливо соотношение

$$\det \omega = \det \omega^T = \det(-\omega) = (-1)^n \det \omega,$$

то $\det \omega = 0$ при нечетном n — пуассонова структура на многообразии нечетной размерности обязательно вырождена.

Определение. Пуассонов центр заданной пуассоновой структуры на алгебре $\mathcal{F}$ — множество элементов $\mathcal{F}$, имеющих нулевую скобку Пуассона с любым элементом алгебры $\mathcal{F}$.

В силу билинейности скобки Пуассона и тождества Лейбница пуассонов центр образует подалгебру в ассоциативной алгебре $\mathcal{F}$. Для невырожденной пуассоновой структуры пуассонов центр состоит только из констант.

Мы рассмотрим пример скобки Пуассона-Ли, определенной на функциях на линейном пространстве, двойственном к некоторой алгебре Ли. Пуассонов тензор такой скобки является линейной функцией координат и определяется структрурными константами алгебры Ли, которые обеспечивают его антисимметричность и тождество Якоби.

Общая конструкция скобки Пуассона-Ли следующая. Пусть $\mathfrak{g}$ (конечномерная) алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$, $\mathfrak{g}^*$ соответствующее двойственное линейное пространство (пространство линейных функционалов на $\mathfrak{g}$) и $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{K}$ невырожденное спаривание двойственных пространств. На алгебре гладких функций $\mathcal{F} = \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}^*)$ скобка Пуассона-Ли задается соотношением[1]:

$$\{f, g\}(\eta) = \langle [df_\eta, dg_\eta], \eta\rangle, \quad \eta \in \mathfrak{g}^*,\ f, g \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Здесь символ $d_\eta f$ означает дифференциал функции f, взятый в точке η. Эта формула требует пояснений. Скобка Пуассона двух функций на пространстве $\mathfrak{g}^*$ должна быть снова функцией на этом пространстве. В левой части формулы (1) функция $\{f, g\}$ берется в некоторой произвольной точке η пространства $\mathfrak{g}^*$, а в правой части приведено явное вычисление значения функции $\{f, g\}$ в выбранной точке. Вычисление основано на отождествлении дифференциалов функций df_η и dg_η в точке η, с элементами пространства $\mathfrak{g}$. Дело в том, что дифференциал функции на некотором многообразии M, взятый в заданной точке $p \in M$ этого многообразия, является линейной функцией на пространстве T_pM, касательном к многообразию в точке p. В нашем случае многообразие M — это линейное пространство $\mathfrak{g}^*$ и касательное пространство $T_\eta\mathfrak{g}^*$ в любой точке $\eta \in \mathfrak{g}^*$ отождествляется с самим $\mathfrak{g}^*$. Поэтому дифференциалы df_η и dg_η можно считать элементами пространства $(\mathfrak{g}^*)^*$, канонически изоморфного пространству $\mathfrak{g}$. Таким образом, $d_\eta f$ и $d_\eta g$ отождествляются с некоторыми элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, затем вычисляется их скобка Ли $[d_\eta f, d_\eta g]$ и, наконец, полученный элемент алгебры Ли посредством спаривания с элементом η двойственного пространства отправляется в числовое поле. Соответствующее число и будет значением функции $\{f, g\}$ в точке η.

Введем теперь координаты на пространствах $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ и запишем скобку Пуассона-Ли в явном виде через координаты. Заодно получим выражение для пуассонова тензора. Пусть $\dim \mathfrak{g} = n$ и $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ — некоторый фиксированный базис в пространстве $\mathfrak{g}$. Тогда структура алгебры Ли полностью определяется скобками базисных векторов и соответствующими структурными константами $C_{ij}^{\ k}$:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{\ k} e_k,$$

[1]Эта скобка называется также пуассоновой структурой Кириллова-Костанта-Сурье.

где по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование. Структурные константы $C_{ij}^{\ k}$ антисимметричны по индексам i и j и, в силу тождества Якоби, удовлетворяют тождеству

$$C_{ij}^{\ a}C_{ak}^{\ r} + C_{ki}^{\ a}C_{aj}^{\ r} + C_{jk}^{\ a}C_{ai}^{\ r} = 0,$$

для любого фиксированного набора значений индексов i, j, k и r.

Введем в пространстве $\mathfrak{g}^*$ линейных функционалов на $\mathfrak{g}$ базис $\{\epsilon^i\}_{1\le i\le n}$, двойственный к выбранному базису $\{e_i\}$ в $\mathfrak{g}$:

$$\langle e_i, \epsilon^j\rangle = \delta_i^j.$$

Теперь любой линейный функционал $\eta \in \mathfrak{g}^*$ представляется линейной комбинацией базисных функционалов: $\eta = z_i\epsilon^i$. Числа $z_i = \langle e_i, \eta\rangle$ будут координатами η в пространстве $\mathfrak{g}^*$ и любая функция $f \in \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}^*)$ будет гладкой функцией n переменных z_i: $f(\eta) = f(z_1, \ldots, z_n)$. Отождествление df_η с элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в выбранных базисах задается правилом:

$$df_\eta = \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}\, dz_i \ \mapsto\ \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}\, e_i \in \mathfrak{g}.$$

Таким образом, скобка Пуассона-Ли (1) и ее пуассонов тензор в выбранных координатах принимают вид:

$$\{z_i, z_j\} = C_{ij}^{\ k} z_k, \qquad \{f, g\}(z) = \partial^i f(z)\, C_{ij}^{\ k} z_k\, \partial^j g(z), \quad \forall\, f, g \in \mathrm{Fun}(\mathfrak{g}^*).$$

Структура Пуассона-Ли, связанная с алгеброй Ли gl_N

Применим все эти конструкции к матричной алгебре Ли $\mathfrak{g} = gl_N(\mathbb{C})$. Как линейное пространство $gl_N(\mathbb{C})$ совпадает пространством $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ комплексных квадратных матриц размером $N \times N$. Зафиксируем в этом пространстве базис из стандартных матричных единиц E_i^j, тогда скобка Ли алгебры $gl_N(\mathbb{C})$ для базисных элементов запишется в виде:

$$[E_{i_1}^{j_1}, E_{i_2}^{j_2}] = \delta_{i_2}^{j_1} E_{i_1}^{j_2} - \delta_{i_1}^{j_2} E_{i_2}^{j_1}.$$

Двойственное пространство линейных функционалов $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ можно отождествить с линейным пространством $N \times N$ матриц, введя в $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ базис $\mathcal{E}_i^j$, двойственный к базису матричных единиц:

$$\langle \mathcal{E}_i^j, A\rangle = a_i^j, \quad \forall\, A = \|a_i^j\| \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}).$$

Обозначив координаты элементов линейного пространства $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ относительно этого базиса символами t_i^j, получаем пуассонов тензор скобки Пуассона-Ли на алгебре функций $\mathcal{F}_N = \mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C}))$:

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{PL} = \delta_{i_2}^{j_1} t_{i_1}^{j_2} - \delta_{i_1}^{j_2} t_{i_2}^{j_1},$$

или, вводя матрицу координат $T = \|t_i^j\|$:

$$\{T_2, T_1\}_{PL} = P_{12}T_1 - T_1P_{12}, \tag{2}$$

где $P_{ij}^{ab} = \delta_i^b\delta_j^a$ — матрица транспозиции.

В этой формуле мы воспользовались компактными матричными обозначениями и соглашением о матричном умножении: если в некотором мономе содержатся матричные множители с одинаковыми номерами матричных пространств, то в соответствующих пространствах подразумевается матричное умножение. Если номера пространств разные, то в каждом из них есть пара свободных матричных индексов (строка и столбец).

Например, пусть A, B и C — некорорые $N \times N$ матрицы: $A = \|a_i^j\|_1^N$ и т.д. Из них можно строить матрицы большего размера, тензорно умножая на единичную матрицу, друг на друга и так далее. Например, матрицу A можно отобразить в матрицы $N^3 \times N^3$ многими способами, мы будем пользоваться следующими обозначениями

$$A_1 = A \otimes I \otimes I, \quad A_2 = I \otimes A \otimes I, \quad A_3 = I \otimes I \otimes A.$$

Те же правила действуют для вложения A в тензорные степени любой размерности. При этом $A_1B_2C_3$ — матрица размером $N^3 \times N^3$ с матричными элементами вида

$$(A_1B_2C_3)_{i_1i_2i_3}^{j_1j_2j_3} = a_{i_1}^{j_1}\, b_{i_2}^{j_2}\, c_{i_3}^{j_3}.$$

А вот объект $A_1B_2C_1$ — матрица размером $N^2 \times N^2$ с такими матричными элементами

$$(A_1B_2C_1)_{i_1i_2}^{j_1j_2} = \sum_{k_1=1}^{N} a_{i_1}^{k_1}\, b_{i_2}^{j_2}\, c_{k_1}^{j_1}.$$

Если матричные элементы a_i^j и т.д. лежат в *коммутативном* кольце (алгебре), то, очевидно, $A_1B_2C_1 = A_1C_1B_2$. Но в общем случае, переставлять эти множители нельзя.

Кроме того, мы будем пользоваться полезным свойством матрицы транспозиции P:

$$P_{12}X_1 = X_2P_{12}, \quad P_{12}X_2 = X_1P_{12}, \quad P_{12}X_3 = X_3P_{12},$$

с очевидным обобщением на любые индексы матричных простанств $P_{ab}X_a = X_bP_{ab}$ и так далее. В частности, $X_{21} = P_{12}X_{12}P_{12}$. Здесь принято во внимание свойство $P_{12}^2 = I_{12}$.

И еще полезно помнить значения частичных следов от матрицы перестановки:

$$\mathrm{Tr}_{(1)}P_{12} = I_2, \quad \mathrm{Tr}_{(2)}P_{12} = I_1, \quad (\mathrm{Tr}_{(1)}P_{12})_i^j := \sum_{a=1}^{N} P_{a\,i}^{a\,j}.$$

В приведенный матричных обозначениях относительно просто проводить достаточно сложные вычисления, которые в индексах выглядят весьма громоздко. Например, проверим прямым вычислением свойство антисимметрии скобки (2):

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12}\{T_2, T_1\}_{PL}P_{12} = P_{12}(P_{12}T_1 - T_1P_{12})P_{12} = T_1P_{12} - P_{12}T_1 = -\{T_2, T_1\}_{PL}.$$

Немногим сложнее явная проверка тождества Якоби $\{T_1, \{T_2, T_3\}_{PL}\}_{PL} + cycle(1,2,3) = 0$. Читателю настоятельно рекомендуется проделать эту проверку в качестве упражнения.

Скобка (2) вырождена и у нее имеется нетривиальный пуассонов центр в алгебре функций $\mathcal{F}_N$.

Утверждение. Однородные полиномы от переменных t_i^j вида $p^{(k)}(t) = \mathrm{Tr}(T^k)$, где T^k — k-я матричная степень матрицы $T = \|t_i^j\|$, принадлежат пуассонову центру скобки (2).

Мы не будем доказывать это утверждение во всей полноте, оставив его проверку в качестве полезного упражнения для читателя. Проиллюстрируем только схему доказательства на простейшем случае $p^{(1)}(t) = \mathrm{Tr}(T)$. Достаточно проверить, что скобка Пуассона (2) полинома $p^{(1)}(t)$ с любой координатной функцией t_i^j равна нулю[2]. Итак, мы должны доказать, что

$$\{p^{(1)}(t), t_i^j\}_{PL} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{p^{(1)}, T_1\}_{PL} = 0.$$

[2]В дальнейшем мы ограничимся алгеброй полиномиальных функций на gl_N^*, для таких функций сделанное утверждение очевидно.

Вычислим частичный след по 2-му пространству от обеих частей равенства (2) и воспользуемся свойствами частичных следов от матрицы P_{12}:

$$\{\mathrm{Tr}(T), T_1\}_{PL} = \mathrm{Tr}_{(2)}\,(P_{12}T_1 - T_1P_{12}) = T_1 - T_1 = 0$$

Аналогично можно доказать пуассон-центральность следов матрицы T любой степени, если воспользоваться правилом Лейбница для $\{T_2, T_1^k\}_{PL}$.

Закончим рассмотрение структуры Пуассона-Ли на алгебре $\mathcal{F}_N$ замечанием о $GL(N)$-инвариантности структуры Пуассона-Ли. На алгебре $\mathcal{F}_N$ можно разными способами задать действие матричной группы $GL(N)$. Мы рассмотрим действие, индуцированное коприсоединенным действием $GL(N)$ на пространстве $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$. А именно, для любой матрицы $S \in GL(N)$ зададим преобразование подобия на матрице координат

$$T \mapsto \tilde{T} = STS^{-1}.$$

Очевидно, это преобразование порождает действие элемента группы S на любую гладкую функцию от t_i^j. Отметим важное свойство такого действия.

Утверждение. Скобка Пуассона-Ли (2) инвариантна относительно коприсоединенного действия группы $GL(N)$, то есть, скобка (2) для координат $\tilde{t}_i^j$ имеет такое же выражение (в терминах $\tilde{t}$), что и скобка исходных координат t_i^j.

Доказательство. Доказательство удобно провести в матричных обозначениях. Воспользуемся тем, что матрица S является постоянной и ее матричные элементы можно вынести из скобки Пуассона-Ли. Тогда получаем следующее:

$$\begin{aligned}\underline{\{\tilde{T}_2, \tilde{T}_1\}_{PL}} &= S_1S_2\{T_2, T_1\}_{PL}S_1^{-1}S_2^{-1} = S_1S_2(P_{12}T_1 - T_1P_{12})S_1^{-1}S_2^{-1} = \\ &= P_{12}S_2S_1T_1S_1^{-1}S_2^{-1} - S_1S_2T_1S_2^{-1}S_1^{-1}P_{12} = \underline{P_{12}\tilde{T}_1 - \tilde{T}_1P_{12}}.\end{aligned}$$

При доказательстве мы пользовались коммутативностью S_1 и S_2 друг с другом и коммутативностью S_2 и T_1. ∎

Отметим, что полиномы $p^{(k)}(t)$ представляют собой инвариантные функции относительно коприсоединенного действия $GL(N)$, поскольку преобразование подобия не меняет след матрицы: $\mathrm{Tr}(T^k) = \mathrm{Tr}(\tilde{T}^k)$. Оказывается, свойство инвариантности относительно коприсоединенного действия является характеристическим свойством пуассонова центра скобки Пуассона-Ли: пуассонов центр образован всеми $GL(N)$-инвариантными элементами и только ими. Первые N полиномов $p^{(k)}(t)$, $0 \le k \le N$, являются независимыми генераторами пуассонова центра. Полиномы $p^{(k)}(t)$ более высокого порядка $k > N$ функционально зависимы от первых N полиномов в силу матричного тождества Гамильтона-Кэли на матрицу T.

Рассмотрим теперь другие пуассоновы структуры на алгебре $\mathcal{F}_N$, которые связаны с так называемыми классическими r-матрицами.

Скобка Склянина

Введем на алгебре $\mathcal{F}_N$ билинейную операцию следующего вида:

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{Sk} = t_{i_1}^{a_1}\,t_{i_2}^{a_2}\,r_{a_1a_2}^{j_1j_2} - r_{i_1i_2}^{a_1a_2}\,t_{a_1}^{j_1}\,t_{a_2}^{j_2} \quad \Leftrightarrow \quad \{T_1, T_2\}_{Sk} = T_1T_2\,r_{12} - r_{12}\,T_1T_2, \qquad (3)$$

где r представляет собой числовую $N^2 \times N^2$ матрицу. Распространим эту операцию на произвольные полиномы от переменных t_i^j посредством правила Лейбница. При каких условиях на числовую матрицу r приведенная операция будет скобкой Пуассона? Билинейность и правило Лейбница мы обеспечили по определению, остались свойства антисимметричности и тождество Якоби.

Потребуем антисимметричности нашей операции: $\{T_1, T_2\}_{Sk} + \{T_2, T_1\}_{Sk} = 0$. Подставляя выражение (3) и учитывая коммутативность координат $T_1T_2 = T_2T_1$, получаем следующее:

$$0 = T_1T_2\, r_{12} - r_{12}\, T_1T_2 + T_2T_1\, r_{21} - r_{21}\, T_2T_1 = [T_1T_2, r_{12} + r_{21}] = 0. \tag{4}$$

Итак, наша скобочная операция антисимметрична, если $r_{12}+r_{21}$ коммутирует с матрицей T_1T_2.

Условия на r, которые следуют из тождества Якоби на скобку (3), также получаются прямым вычислением, которое мы оставляем для упражнения читателю. Ответ следующий:

$$\{T_1, \{T_2, T_3\}_{Sk}\}_{Sk} + \mathrm{cycle}(1,2,3) = \big[T_1T_2T_3,\ [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}]\,\big]\,.$$

Таким образом, для удовлетворения тождества Якоби *достаточно*, чтобы матрица r удовлетворяла *классическому уравнению Янга-Бакстера*:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \tag{5}$$

Если условия (4) и (5) выполнены, то скобка (3) называется скобкой Склянина, а решение r классического уравнения Янга-Бакстера называется классической r-матрицей. Есть ли примеры таких матриц? Их можно извлекать из специальных разложений решений соотношения кос или связанного с ним квантового уравнения Янга-Бакстера.

Мы приведем пример классической r-матрицы, отвечающей R-матрице Дринфельда-Джимбо. Умножим эту R-матрицу на матрицу перестановки P и перейдем к $\mathcal{R} = PR$, которая имеет следующий вид в базисе матричных единиц E_i^j:

$$\mathcal{R} = q\sum_{i=1}^{N} E_i^i \otimes E_i^i + \sum_{i\neq j}^{N} E_j^j \otimes E_i^i + (q - q^{-1})\sum_{i>j}^{N} E_i^j \otimes E_j^i.$$

Эта матрица удовлетворяет *квантовому уравнению Янга-Бакстера*:

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{6}$$

Введем параметр $h = \log q$ и рассмотрим разложение матрицы $\mathcal{R}$ при $h \to 0$. В первом порядке по h (когда $q^{\pm 1} = 1 \pm h + o(h)$) для матрицы $\mathcal{R}$ получаем

$$\mathcal{R} = I + h\, r + o(h), \qquad r = \sum_{i=1}^{N} E_i^i \otimes E_i^i + 2\sum_{i>j}^{N} E_i^j \otimes E_j^i.$$

Величина r является классической r-матрицей. То, что она удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера, легко проверить из разложения произведений R-матриц в квантовом уравнении Янга-Бакстера (6): линейная по h часть удовлетворяется тождественно, а квадратичная как раз приводит к классическому уравнению Янга-Бакстера (5).

Пользуясь явным видом классической r-матрицы, получаем соотношение:

$$r_{12} + r_{21} = 2\sum_{i,j=1}^{N} E_i^j \otimes E_j^i = 2P_{12},$$

так что $[T_1T_2, r_{12} + r_{21}] = 0$ и условие антисимметричности скобки Склянина тоже удовлетворяется.

Заметим, что приведенное выше свойство "симметрической части" классической r-матрицы $r_{12} + r_{21} = 2P_{12}$ выполнено для всех классических r-матриц, полученных в первом порядке по h из Геккевских R-матриц. Действительно, если R — Геккевская R матрица, то соответствующая $\mathcal{R}$-матрица удовлетворяет уравнению

$$(P_{12}\mathcal{R}_{12})^2 = I + (q - q^{-1})P_{12}\mathcal{R}_{12}.$$

Подставляя разложение $\mathcal{R} = I + h\, r + o(h)$, получаем в первом порядке по h:

$$r_{12} + P_{12}r_{12}P_{12} = 2P_{12} \quad \Leftrightarrow \quad r_{12} + r_{21} = 2P_{12}.$$

Если определить симметрическую и антисимметрическую части r-матрицы формулами

$$r_{12}^{\pm} = \frac{r_{12} \pm r_{21}}{2} \quad \Rightarrow \quad r_{12}^{+} = r_{21}^{+}, \quad r_{12}^{-} = -r_{21}^{-},$$

то, учитывая, что для Геккевского случая $r_{12}^{+} = P_{12}$, мы видим, что скобка Склянина зависит только от антисимметрической части r^{-}, так как

$$T_1T_2P_{12} - P_{12}T_1T_2 = 0$$

в силу коммутативности координат $T_1T_2 = T_2T_1$.

Скобка Склянина тоже является вырожденной, но ее пуассонов центр существенно меньше, чем у скобки Пуассона-Ли. Можно показать, что пуассонов центр скобки Склянина генерируется единственным полиномом — детерминантом матрицы T.

Скобка Семенова Тянь-Шанского

Последняя пуассонова структура на алгебре $\mathcal{F}_N$ функций на $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$, которую мы должны обсудить, задается так называемой скобкой Семенова Тянь-Шанского. Ее пуассонов тензор имеет следующий вид

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21}\, T_1T_2 - T_1T_2\, r_{12} + T_2r_{12}T_1 - T_1r_{21}T_2, \tag{7}$$

где r_{12} — классическая r-матрица. Мы будем считать, что r происходит из Геккевской R-матрицы. Как мы уже выяснили, для таких r-матриц выполнено свойство $r^{+} = P$ и это, как и в случае скобки Склянина, гарантирует антисимметричность скобки (7)

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = -\{T_2, T_1\}_{STS}$$

Однако, в отличие от скобки Склянина, для скобки Семенова Тянь-Шанского существенны как антисимметрическая часть r^{-} классической r-матрицы, так и ее симметрическая часть r^{+}.

Скобка Семенова Тянь-Шанского вырождена и ее пуассонов центр содержит в себе пуассонов центр скобки Пуассона-Ли (2).

Утверждение. Полиномы $p^{(k)} = \mathrm{Tr}(T^k)$ принадлежат пуассоновому центру скобки Семенова Тянь-Шанского:

$$\{p^{(k)}(t), t_i^j\}_{STS} = 0.$$

Замечание. Можно показать, что весь пуассонов центр скобки Пуассона-Ли генерируется полиномами $p^{(k)}(t)$ (они иногда называются инвариантами Гельфанда). Строгое доказательство аналогичного утверждения для скобки Семенова Тянь-Шанского автору неизвестно (хотя для классической r-матрицы Дринфельда-Джимбо это весьма вероятно из деформационных аргументов).

Геометрическое замечание. В линейном пространстве $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C})$ определено коприсоединенное действие матричной группы Ли $GL(N)$: $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{C}) \ni M \mapsto SMS^{-1}$, $S \in GL(N)$. Орбиты такого действия состоят из матриц с одинаковыми элементарными делителями (то есть, обладающими одинаковым спектром и жордановой структурой). Если мы ограничимся полупростыми матрицами, то их орбиты однозначно фиксируются заданием значений N следов $\mathrm{Tr}(M^k)$, $1 \le k \le N$. Алгебра функций $\mathcal{F}_N$ ограничивается на эти орбиты: алгебра функций на орбите, содержащей матрицу M, будет фактор-алгеброй алгебры $\mathcal{F}_N$ по идеалу, порожденному соотношениями $\mathrm{Tr}(T^k) = \mathrm{Tr}(M^k)$. Однако пуассонова структура на эти орбиты ограничивается только для скобки Пуассона-Ли и скобки Семенова Тянь-Шанского, для котороых полиномы $\mathrm{Tr}(T^k)$ принадлежат пуассонову центру. Поэтому только эти пуассоновы структуры пригодны для квантования функций на орбитах коприсоединенного действия группы $GL(N)$. Скобка Склянина на орбиты не ограничивается. Ее можно ограничить только на группу (например, на группу $SL(N)$ — матрицы с единичным детерминантом). Квантование этой скобки приводит к алгебре квантованных функций на группе, так называемой RTT алгебре, исторически одному из первых примеров квантовых групп.

Есть еще одно важное свойство, связывающее скобки Семенова Тянь-Шанского и Пуассона-Ли: они образую согласованный пучок скобок Пуассона. По определению, это означает, что любая их линейная комбинация

$$\{\,,\}_{\alpha,\beta} = \alpha\{\,,\}_{PL} + \beta\{\,,\}_{STS}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

образует скобку Пуассона. Основная трудность в доказательстве этого факта заключается, очевидно, в проверке тождества Якоби для скобки $\{\,,\}_{\alpha,\beta}$. Это свойство приводит к связи некоммутативных алгебр, полученных квантованием алгебры $\mathcal{F}_N$ с пуассоновыми структурами (2) и (7).

Деформационное квантование алгебры с пуассоновой структурой

Рассмотрим теперь процедуру квантования коммутативной алгебры со скобкой Пуассона. Практически это означает переход от коммутативной алгебры $\mathcal{F}$ к некоммутативной $\mathcal{F}_h$, зависящей от “параметра квантования” h с выполнением ряда условий. При этом можно считать, что алгебра $\mathcal{F}_h$ получается введением на $\mathcal{F}$ новой операции умножения $\star$. Сразу отметим, что эта прцедура неоднозначна, существует много эквивалентных квантований одной коммутативной алгебры, отличающихся конкретным устройством некоммутативного умножения $\star$. Термин “эквивалентное квантование” означает, что соответствующие квантовые алгебры связаны изоморфизмом специального вида. Дадим теперь формальное определение.

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ — коммутативная ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, снабженная скобкой Пуассона $\{\,,\}: \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}$. Некоммутативная алгебра $\hat{\mathcal{F}}_h$ над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$ от параметра h (параметр квантования) называется квантованием алгебры $\mathcal{F}$ если существует изоморфизм α_h $\mathbb{C}[[h]]$-модулей $\hat{\mathcal{F}}_h$ и $\mathcal{F}[[h]]$:

$$\alpha_h : \quad \mathcal{F}[[h]] \to \hat{\mathcal{F}}_h,$$

который удовлетворяет следующим условиям:

(а) Фактор-алгебра $\hat{\mathcal{F}}_0 := \hat{\mathcal{F}}_h/(h\hat{\mathcal{F}}_h)$ изоморфна $\mathcal{F}$ как $\mathbb{C}$-алгебра.

Замечание. Поясним смысл пункта (а) на примере действия изоморфизма α_h на произвольный элемент[3] $a\in\mathcal{F}\subset\mathcal{F}[[h]]$:

$$\alpha_h(a) = \hat{a}_0 + h\hat{a}_1 + h^2\hat{a}_2 + \dots \in \hat{\mathcal{F}}_h, \quad \forall\, a\in\mathcal{F}.$$

Согласно пункту (а), если в коммутативной алгебре $\mathcal{F}$ выполнено свойство $a\cdot b = c$ то в квантовой алгебре $\hat{\mathcal{F}}_h$ должно выполняться равенство $\hat{c}_0 \equiv \hat{a}_0 * \hat{b}_0 \,(\mathrm{mod}\ h)$, где знак $*$ означает умножение в некоммутативной алгебре $\hat{\mathcal{F}}_h$.

(б) Пользуясь изоморфизмом α_h, зададим на коммутативной алгебре $\mathcal{F}[[h]]$ новое (некоммутативное) умножение произвольных элементов $f, g\in\mathcal{F}$ по формуле:

$$f\star_h g = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(f)*\alpha_h(g)) = f\cdot g + h\, c_1(f,g) + h^2\, c_2(f,g) + \dots, \tag{8}$$

где $f\cdot g$ — коммутативное произведение в $\mathcal{F}$, $c_k(f,g)$ — элементы алгебры $\mathcal{F}$. Такое определение продолжает изоморфизм α_h до изоморфизма некоммутативных алгебр $\mathcal{F}[[h]]\simeq\hat{\mathcal{F}}_h$:

$$\alpha_h(f\star_h g) = \alpha_h(f)*\alpha_h(g).$$

Замечание. Очень существенное ограничение на вид изоморфизма α_h накладывает требование ассоциативности произведения $\star$:

$$(a\star b)\star c = a\star(b\star c).$$

Фактически, обеспечение ассоциативности нового произведения является главной трудностью при построении квантования коммутативной алгебры.

(в) Должен иметь место “классический предел”:

$$\frac{f\star_h g - g\star_h f}{h} \equiv (c_1(f,g)-c_1(g,f))(\mathrm{mod}\ h) \equiv \{f,g\}(\mathrm{mod}\ h)$$

Рассмотрим теперь квантования коммутативной алгебры функций $\mathcal{F}_N$ с тремя различными пуассоновыми структурами, описанными выше.

Квантование структуры Пуассона-Ли на $\mathcal{F}_N = \mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}^*_N(\mathbb{C}))$

В данном примере для построения квантовой алгебры будет достаточно кольца полиномов от h: $\mathbb{C}[h]\subset\mathbb{C}[[h]]$. Квантовой алгеброй будет универсальная обертывающая $U(gl_h(N))$.

[3] В силу $\mathbb{C}[[h]]$-линейности изоморфизма α_h это пояснение легко распространяется на любой элемент алгебры $\mathcal{F}[[h]]$.

Рассмотрим N^2-мерное линейное пространство V над $\mathbb{C}$ и зафиксируем в нем базис, элементы которого обозначим e_i^j, $1 \le i, j \le N$. Далее построим $\mathbb{C}[h]$-модуль $V_h = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[h]$ и рассмотрим его свободную тензорную алгебру $\mathbb{T}(V_h)$.

Алгебра $U(gl_h(N))$ является фактором тензорной алгебры $\mathbb{T}(V_h)$ по двустороннему идеалу, порожденному квадратично-линейными элементами следующего вида:

$$U(gl_h(N)) = \mathbb{T}(V_h)/\langle e_i^j e_k^s - e_k^s e_i^j - h(\delta_k^j e_i^s - \delta_i^s e_k^j)\rangle.$$

Как $\mathbb{C}[h]$-модуль пространство $U(gl_h(N))$ раскладывается в прямую сумму однородных по e_i^j подмодулей

$$U(gl_h(N)) = \bigoplus_{k \ge 0} U^{(k)}(e) \otimes \mathbb{C}[h].$$

Здесь комплексные линейные пространства $U^{(k)}(e)$ представляют собой линейные оболочки всевозможных мономов k-й степени от базисных элементов e_i^j. Нам потребуется выделить базисные наборы мономов в этих пространствах. Для этого введем линейное лексикографическое упорядочение на множестве e_i^j:

$$e_{i_1}^{j_1} < e_{i_2}^{j_2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} i_1 < i_2 \\ \text{или} \\ i_1 = i_2,\; j_1 < j_2. \end{cases}$$

Естественно, это один из многих вариантов упорядочения, конкретный выбор для дальнейшего не важен. Согласно теореме Пуанкаре-Биркхофа-Витта, линейный базис в пространстве $U^{(k)}(e)$ образуют *упорядоченные* мономы k-го порядка, то есть мономы вида

$$e_{i_1}^{j_1} \circ e_{i_2}^{j_2} \circ \cdots \circ e_{i_k}^{j_k}, \quad \text{где} \quad e_{i_1}^{j_1} \le e_{i_2}^{j_2} \le \cdots \le e_{i_k}^{j_k}.$$

Ниже мы будем опускать знак $\circ$ умножения элементов некоммутативной (квантовой) алгебры.

Отметим, также, другой возможный выбор базиса (назовем его Вейлевским базисом) — это всевозможные *полностью симметрические* мономы k-го порядка, порожденные приведенными выше упорядоченными мономами

$$e_1 e_2 \dots e_k \;\mapsto\; \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(k)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ симметрической группы k-го порядка $\mathcal{S}_k$, а символ e_s есть сокращение для $e_{i_s}^{j_s}$.

Проиллюстрируем это утверждение для случая $N = 2$. Вводя для краткости обозначения $\hat{a} < \hat{b} < \hat{c} < \hat{d}$ для упорядоченного базиса $e_1^1 < e_1^2 < e_2^1 < e_2^2$, получаем, что базис в $U^{(k)}$ образуют элементы

$$\hat{a}^{k_1} \hat{b}^{k_2} \hat{c}^{k_3} \hat{d}^{k_4}, \qquad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k, \quad k_i \ge 0.$$

А вот пример перехода к Вейлевским базисным элементам в $U^{(3)}$:

$$\hat{a}\hat{b}\hat{c} \;\mapsto\; \frac{1}{6}\,(\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{a}\hat{c}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{c}\hat{a} + \hat{c}\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}) \qquad \hat{a}^2\hat{b} \;\mapsto\; \frac{1}{3}\,(\hat{a}^2\hat{b} + \hat{a}\hat{b}\hat{a} + \hat{b}\hat{a}^2).$$

Вернемся теперь к проблеме квантования алгебры гладких функций $\mathcal{F}_N = \mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}^*_N(\mathbb{C}))$ со скобкой Пуассона-Ли (2). Точнее, мы опишем квантование подалгебы полиномиальных функций в $\mathcal{P}_N \subset \mathcal{F}_N$, что, впрочем, вполне достаточно для приложений.

Утверждение.
Квантованием алгебры $\mathcal{P}_N$ со скобкой Пуассона-Ли служит алгебра $U(gl_h(N))$.

Для доказательства мы явно построим изоморфизм квантования α_h и опишем некоммутативное произведение $\star_h$ функций от координат t^j_i. Как уже отмечалось выше, $\mathbb{C}[h]$-линейность изоморфизма α_h позволяет задать его только на базисных элементах алгебры $\mathcal{P}_N$. Как комплексное линейное пространство эта алгебра раскладывается в прямую сумму однородных компонент, аналогичных компонентам $U^{(k)}$ в алгебре $U(gl_h(N))$:

$$\mathcal{P}_N = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{P}^{(k)},$$

причем утверждение о базисе в однородных компонентах $\mathcal{P}^{(k)}$, аналогичное теореме Пуанкаре-Биркхофа-Витта, в случае коммутативной алгебры очевидно.

Итак, рассмотрим отображение $\alpha_h : \mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h] \to U(gl_h(N))$, которое на базисных элементах алгебры $\mathcal{P}_N$ имеет вид:

$$\alpha_h(t^{j_1}_{i_1} \dots t^{j_k}_{i_k}) = e^{j_1}_{i_1} \dots e^{j_k}_{i_k}.$$

На всю алгебру $\mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h]$ действие отображения α_h распространим по линейности. Легко видеть, что построенный изоморфизм $\mathbb{C}[h]$-модулей и будет искомым изоморфизмом квантования.

Приведем несколько явных формул для нового умножения $\star_h$ в случае $N = 2$. Скобка Пуассона-Ли (2) для координат a, b, c и d в алгебре $\tilde{\mathcal{P}}_2$ имеет вид

$$\{a, b\}_{PL} = b, \quad \{a, c\}_{PL} = -c, \quad \{a, d\}_{PL} = 0,$$

$$\{b, c\}_{PL} = a - d, \quad \{b, d\}_{PL} = b, \quad \{c, d\}_{PL} = -c,$$

скобка Ли алгебры Ли $gl_h(2)$ отличается от этих выражений только множителем h в правой части. То есть, перестановочные соотношения между генераторами $U(gl_h(2))$ записываются в виде

$$\hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a} = h\hat{b}, \quad \hat{a}\,\hat{c} - \hat{c}\,\hat{a} = -h\hat{c}, \quad \text{и так далее.}$$

На базисных элементах изоморфизм α_h действует так:

$$\alpha_h(a^{k_1} \dots d^{k_4}) = \hat{a}^{k_1} \dots \hat{d}^{k_4} \qquad \alpha_h^{-1}(\hat{a}^{k_1} \dots \hat{d}^{k_4}) = a^{k_1} \dots d^{k_4}.$$

Чтобы получить обратное отображение на *любом* элементе $f \in U(gl_h(2))$, нужно сначала представить f в виде комбинации базисных элементов, а потом применить обратное отображение на базисных элементах, выписанное выше.

Построим теперь некоммутативное умножение $\star_h$ в алгебре $\mathcal{P}_N \otimes \mathbb{C}[h]$ согласно формуле (8). Тогда, например, получаем:

$$a \star_h b = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(a)\alpha_h(b)) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b}) = a \cdot b.$$

А вот для переставленных сомножителей ответ будет другой:

$$b \star_h a = \alpha_h^{-1}(\hat{b}\,\hat{a}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b} - h\,\hat{b}) = a \cdot b - h\,b.$$

На промежуточном этапе нам пришлось разложить произведение $\hat{b}\,\hat{a}$ в алгебре $U(gl_h(N))$ в линейную комбинацию базисных векторов. При этом выполнено свойство (б) определения квантования (классический предел):

$$\frac{1}{h}\,(a \star_h b - b \star_h a) = b = \{a, b\}_{PL}.$$

Другой пример: построим некоммутативное произведение квадратичных мономов из алгебры функций:

$$\begin{aligned}(a \cdot c) \star_h (b \cdot c) &= \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\underline{\hat{c}\,\hat{b}}\,\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,(\hat{b}\,\hat{c} - h(\hat{a} - \hat{d}))\,\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}^2 - h\hat{a}^2\hat{c} + h\hat{a}\,\underline{\hat{d}\,\hat{c}}) \\ &= \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}^2 - h\hat{a}^2\hat{c} + h\hat{a}\,\hat{c}\,\hat{d} + h^2\hat{a}\,\hat{c}).\end{aligned}$$

В последнем равенстве изоморфизм α_h^{-1} применяется к линейной комбинации базисных мономов в $U(gl_h(2))$ и мы получаем ответ:

$$(a \cdot c) \star_h (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c^2 - h\,a^2 \cdot c + h\,a \cdot c \cdot d + h^2 a \cdot c$$

Аналогичным образом имеем для переставленных сомножителей

$$(b \cdot c) \star_h (a \cdot c) = \alpha_h^{-1}(\underline{\hat{b}\,\hat{c}\,\hat{a}}\,\hat{c}) = \alpha_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}^2) = a \cdot b \cdot c^2,$$

классический предел также выполняется:

$$\frac{(a \cdot c) \star_h (b \cdot c) - (b \cdot c) \star_h (a \cdot c)}{h} \equiv (a \cdot c \cdot d - a^2 \cdot c)\,(\mathrm{mod}\ h) \equiv \{a \cdot c\,, b \cdot c\}_{PL}(\mathrm{mod}\ h).$$

Отметим одну особенность построенного квантования: изоморфизм α_h не отображает, вообще говоря, элементы пуассонова центра $\mathcal{P}_N$ в центр алгебры $U(gl_h(N))$. Например, пуассон-центральный элемент $p^{(2)} = \mathrm{Tr}(T^2) = a^2 + d^2 + 2b \cdot c$ отображается в элемент

$$\alpha_h(a^2 + d^2 + 2b \cdot c) = \hat{a}^2 + \hat{d}^2 + 2\hat{b}\,\hat{c},$$

который не принадлежит центру $U(gl_h(2))$.

Этот недостаток отсутствует в другом (эквивалентном) квантовании, основанном на изоморфизме β_h, который базисные мономы алгебры $\mathcal{P}_N$ отображает в соответствующие элементы Вейлевского базиса в $U(gl_h(2))$. При этом некоммутативное умножение становится другим. Например, для уже разобранного выше произведения элементов a и b получаем такие выражения:

$$a \star_h b = \beta_h^{-1}(\beta_h(a)\beta_h(b)) = \beta_h^{-1}(\hat{a}\,\hat{b}) = \beta_h^{-1}\left(\frac{1}{2}\,(\hat{a}\,\hat{b} + \hat{b}\,\hat{a}) + \frac{1}{2}\,(\hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a})\right) = a \cdot b + \frac{h}{2}\,b.$$

Аналогично имеем:

$$b \star_h a = a \cdot b - \frac{h}{2}\,b.$$

Некоммутативное произведение изменилось, но, естественно, классический предел остался прежним. Можно показать, что в этом варианте квантования элементы пуассонова центра $\mathcal{P}_N$ уже отображаются в центральные элементы алгебры $U(gl_h(2))$. Например:

$$\beta_h(a^2 + d^2 + 2b \cdot c) = \hat{a}^2 + \hat{d}^2 + \hat{b}\,\hat{c} + \hat{c}\,\hat{b} \in Z(U(gl_h(2))).$$

Квантование скобок Склянина и Семенова Тянь-Шанского

В результате квантования квадратичных скобок Склянина и Семенова Тянь-Шанского получаются примеры так называемых квантовых матричных алгебр, структура которых задается R-матрицами.

Квантование алгебры функций $\mathcal{F}_N$ со скобкой Склянина приводит квантовой матричной RTT-алгебре. Это неформальное название связано с матричной записью перестановочных соотношений в алгебре. Для R-матрицы Дринфельда-Джимбо RTT-алгебра интерпретируется как квантование алгебры функций на матричной группе $SL(N)$ (после ограничения на фактор-алгебру, порожденную соотношением $\det T = 1$).

Определение. Алгебра $\mathcal{T}(R)$ квантованных функций на группе $GL(N)$ (или RTT-алгебра) представляет собой ассоциативную алгебру с единицей, порожденную элементами t_i^j, удовлетворяющими квадратичным перестановочным соотношениям вида:

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}, \qquad T = \|t_i^j\|_1^N,$$

где R представляет собой R-матрицу Дринфельда-Джимбо.

Проверим, что из перестановочных соотношений в классическом пределе получается скобка Склянина на алгебре функций $\mathcal{F}_N$. Для этого умножим матричное равенство для генераторов алгебры $\mathcal{T}(R)$ на матрицу перестановки и перепишем его в терминах $\mathcal{R}$-матрицы:

$$\mathcal{R}_{12}T_1T_2 = T_2T_1\mathcal{R}_{12}.$$

Здесь умножение матричных элементов производится в некоммутативной алгебре, в определении квантования оно обозначалось символом $\star$. Подставив разложение $\mathcal{R}_{12} = I + h\,r_{12} + o(h)$, которое следует из разложения параметра $q^h = 1 + h + \dots \in \mathbb{C}[[h]]$, получаем следующее

$$T_1 \star T_2 + h\,r_{12}T_1 \star T_2 - T_2 \star T_1 - h\,T_2 \star T_1 r_{12} + o(h) = 0,$$

откуда, в свою очередь, следует классический предел

$$\begin{aligned} \frac{T_1 \star T_2 - T_2 \star T_1}{h} &= \frac{1}{h}\left(T_2 \star T_1\, r_{12} - r_{12}\, T_1 \star T_2 + o(h)\right) \\ &\equiv (T_1 \cdot T_2\, r_{12} - r_{12}\, T_1 \cdot T_2)(\mathrm{mod}\ h) = \{T_1, T_2\}_{Sk}(\mathrm{mod}\ h). \end{aligned}$$

Здесь мы учли $T_1 \star T_2 = T_1 \cdot T_2 + h(\dots)$ и приняли во внимание коммутативность умножения функций из $\mathcal{F}_N$.

Квантование алгебры $\mathcal{F}_N$ со скобкой Семенова Тянь-Шанского приводит к другой важной квантовой матричной алгебре — алгебре уравнения отражений.

Определение. Алгебра уравнения отражений $GL(N)$ типа это ассоциативная алгебра $\mathcal{L}(R)$ с единицей, порожденная элементами l_i^i, которые удовлетворяют квадратичным перестановочным соотношениям следующего вида:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}.$$

Здесь R представляет собой R-матрицу Дринфельда-Джимбо.

Отметим, что и в RTT-алгебре, и в алгебре уравнения отражений можно брать любую R-матрицу, удовлетворяющую соотношению кос. Получившиеся квадратичные алгебры имеют другую интерпретацию и, вообще говоря, могут быть не связаны с квантованием алгебры функций $\mathcal{F}_N$.

Если определяющие соотношения на генераторы алгебры $\mathcal{L}(R)$ дважды умножить слева на матрицу перестановки P_{12}, то эти соотношения примут вид, пригодный для вычисления классического предела:

$$\mathcal{R}_{21}L_2\mathcal{R}_{12}L_1 = L_1\mathcal{R}_{21}L_2\mathcal{R}_{12}.$$

Убедитесь сами, что в классическом пределе из этих соотношений получается скобка Семенова Тянь-Шанского.

Помимо алгебраической структуры, введенные нами квантовые матричные алгебры $\mathcal{T}(R)$, $\mathcal{L}(R)$ и $U(gl_h(N))$ обладают важными коструктурами (коумножением, коединицей и отображением антипода), что превращает их в так называемые алгебры Хопфа. ‘Этот факт, в частности, сильно упрощает построение теории представлений, поскольку позволяет строить тензорные произведения модулей над алгебрами, определять сопряженные представления в дуальных пространствах и так далее. Свойствам коструктур и их конкретному виду на различных алгебрах посвящена следующая тема наших лекций.