

Семинар 11

Оператор Ходжа, оператор d^* и оператор Лапласа L

(Задачи на вычисление)

Вычислить в декартовых координатах на плоскости:

- 1) $*(xdy - y^2dx)$;
- 2) $d^*(dy - xydx)$;
- 3) $L(xdy + ydx)$.

Вычислить в полярных координатах на плоскости:

- 4) $*(1), *(dr)$;
- 5) $d^*(dr \wedge d\varphi), d^*(\cos \varphi dr + r^4 d\varphi)$;
- 6) $L(dr), L(d\varphi)$.

(задачи на доказательство)

7. Доказать, что в $(\mathbb{R}^n, \text{can})$ действие оператора Лапласа L на дифференциальную форму сводится к действию (с точностью до знака) оператора Δ (смотри семинар 10) на коэффициенты этой формы.

8. Доказать, что на функциях операторы L и Δ совпадают.

9. Является ли оператор d^* супердифференцированием алгебры Грассмана?

10. Доказать, что $(d^*)^2 = 0$.

11. Доказать, что оператор Лапласа L коммутирует с операторами $d, d^*, *$. Коммутирует ли оператор Лапласа с движениями риманова многообразия?

12*. Доказать теорему Ходжа для тора.

13*. Доказать, что на сфере (S^n, can) не существует гармонических функций, отличных от константы.

14*. Утверждение задачи 13 верно для любого связного компактного ориентированного риманова многообразия (Н.Норф, 1930).