

## Избранные главы дискретной математики. Весна 2024г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения нужно послать вашему учебному ассистенту (его адрес сообщен всем записанным на этот НИС на корпоративную почту), до 24:00 четверга перед следующим занятием.

### Задание с 9 занятия.

- (1) Покажите, что если  $f$  — монотонная булева функция, то двойственная булева функция  $f^*$  также монотонна. (Напомним определение двойственной булевой функции:  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .)
- (2) Покажите, что композиция двух самодвойственных функций (т.е. таких, что  $f = f^*$ ) снова является самодвойственной функцией.
- (3) Булева функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется симметрической, если она не меняется при любой перестановке аргументов.
  - а) Сколько всего имеется симметрических булевых функций от  $n$  переменных? Что получится при применении операций булевой алгебры (т.е. дизъюнкции, конъюнкции и отрицания) к симметрическим функциям?
  - б) Сколько всего имеется симметрических самодвойственных булевых функций от  $n$  переменных?
  - в) Покажите, что существует всего  $n+2$  монотонные симметрические булевых функции от  $n$  переменных, а именно, следующие функции  $v_0, \dots, v_{n+1}$ :

$$v_k(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{если } \sum x_i \geq k \\ 0 & \text{если } \sum x_i < k \end{cases} .$$

(Здесь  $\sum x_i$  понимается как сложение в обычной арифметике, т.е.  $\sum x_i$  это число единиц среди  $x_1, \dots, x_n$ .)

Покажите, что  $v_k^* = v_{n+2-k}$ . Найдите сокращенную и все тупиковые ДНФ для функции  $v_k$ .

- (4) Задачи 3, 4 и 5 из задания 4 остаются актуальными (и можно присылать их решения!) до тех пор, пока мы на одном из следующих занятий их не обсудим.