Механика 2024

Домашнее задание № 7

Срок сдачи задания: до конца дня **19.05.24**

---

1. Лагранжиан точечного заряда q массы m, движущегося в пространстве $\mathbb{R}^3$ в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}$ имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} + \frac{q}{2\,c}\,(\vec{H}\times\vec{r},\,\dot{\vec{r}}).$$

Здесь $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор заряженой частицы в инерциальной декартовой системе отсчета; c — скорость света в вакууме[1].

а) Найдите обобщенный импульс $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ частицы и постройте гамильтониан системы.

б) Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси $O\vec{z}$: $\vec{H} = (0, 0, H)$. Найдите решение уравнений Гамильтона, отвечающее начальным данным

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad p_1(0) = p, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = P,$$

и опишите форму соответствующей траектории. *(Совет: при решении удобно воспользоваться комплексными переменными $Q = x_1 + ix_2$, $P_Q = p_1 + ip_2$.)*

в) Вычислите скобки Пуассона $\{v_i, v_j\}_{1\le i,j\le 3}$ между компонентами вектора скорости заряда $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) := (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

2. Лагранжиан двумерного изотропного осциллятора в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

а) Найдите обобщенные импульсы и постройте гамильтониан системы.

б) Докажите, что функции

$$J_1 = \frac{1}{2m}(p_x^2 - p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - y^2), \quad J_2 = \frac{1}{m}\,p_x p_y + m\omega^2 xy, \quad J_3 = \omega\,(xp_y - yp_x)$$

являются интегралами движения.

в) Докажите, что линейная оболочка функций J_i $\mathcal{L} := \mathrm{Span}(J_1, J_2, J_3)$ инвариантна относительно скобки Пуассона, т.е., скобка Пуассона любых двух элементов из $\mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$.

---

[1] В курсе лекций лагранжиан заряда, взаимодействующего с внешним магнитным полем $\vec{H}$, задавался с использованием векторного потенциала электромагнитного поля $\vec{A}$: $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A}$. В случае однородного магнитного поля имеем $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{r}$.

3. Рассмотрим фазовое пространство трехмерной частицы, снабженное канонической скобкой Пуассона $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$, где $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ — радиус-вектор и импульс частицы, соответственно.

Пусть $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — произвольная гладкая векторная функция:

$$\vec{F} = f_1 \vec{r} + f_2 \vec{p} + f_3 [\vec{r} \times \vec{p}],$$

где $f_{\alpha\ (\alpha=1,2,3)}$ — функции от скалярных аргументов $\vec{r}^{\,2}$, $\vec{p}^{\,2}$ и $(\vec{r}, \vec{p})$. Вычислите следующие скобки Пуассона:

а) $\{\vec{F}, (\vec{M}, \vec{n})\}$, где $\vec{M} := [\vec{r} \times \vec{p}]$ — вектор углового момента частицы, $\vec{n}$ — постоянный вектор, задающий направление в пространстве (компоненты $\vec{n}$ не зависят от $\vec{r}$ и $\vec{p}$).

б) $\{\vec{F}, \vec{M}^2\}$.

4. Гамильтониан намагниченного шара во внешнем однородном магнитном поле $\vec{H}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{M}^2}{2I} - \gamma\, (\vec{M}, \vec{H}),$$

где $\vec{M}(t) = (M_1(t), M_2(t), M_3(t))$ — вектор момента импульса шара, I и γ — заданные положительные константы (соответственно, момент инерции шара и, так называемое, гиромагнитное отношение).

а) Выпишите гамильтоновы уравнения движения для компонент момента импульса M_i, полагая, что скобки Пуассона M_i такие же, как и у компонент углового момента частицы.

б) Решите уравнения движения для случая однородного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси $O\vec{z}$: $\vec{H} = (0, 0, H)$.

5. Пуассонова структура на $\mathbb{R}^3$ в декартовых координатах (x, y, z) задается формулами

$$\{x, y\} = -2z, \quad \{y, z\} = -2x, \quad \{z, x\} = 2y. \qquad (*)$$

а) Убедитесь, что функция $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ принадлежит пуассонову центру этой структуры, то есть имеет нулевую скобку Пуассона с любой функцией.

б) Постройте невырожденную пуассонову структуру, ограничив скобки $(*)$ на симплектические листы, задаваемые поверхностями уровня функции f — двухполостными гиперболоидами вращения:

$$y^2 = x^2 + z^2 + R^2, \quad R \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Найдите (какие-либо) координаты Дарбу для невырожденных скобок на симплектических листах.

в) Рассмотрим три гамильтоновых векторных поля X_x, X_y и X_z, связанных с декартовыми координатными функциями x, y и z, соответственно. Убедитесь, что эти поля касательны к симплектическим листам пуассоновой структуры. Постройте соотношение, задающее линейную зависимость полей X_x, X_y и X_z в каждой точке $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.