

Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ

Рекомендуемый срок сдачи: **22 мая 2024**

1. Рассмотрим алгебру уравнения отражений, порожденную N^2 генераторами L_i^j , $1 \leq i, j \leq N$, удовлетворяющими квадратичным соотношениям

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1, \quad L = \|L_i^j\| \quad (1)$$

с R -матрицей $GL(N)$ типа. Перейдем к новым генераторам K_i^j с помощью линейного сдвига:

$$L = Ie_{\mathcal{L}} - (q - q^{-1})K, \quad K = \|K_i^j\|,$$

где $e_{\mathcal{L}}$ — единичный элемент алгебры уравнения отражений.

- а) Зафиксируем базис $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ в N -мерном комплексном векторном пространстве V и определим представление алгебры уравнения отражений в пространстве V , задав линейное действие ее генераторов следующим образом:

$$L_1 R_1 \triangleright x_1 = R_1^{-1} x_1.$$

Найдите явный вид действия следующего полинома m -го порядка от генераторов K :

$$K_{m+1} K_m \dots K_3 K_2 \triangleright x_1 = ?,$$

где $K_1 = K_1$, $K_p = R_{p-1}^{-1} K_{p-1} R_{p-1}$ для всех $p \geq 2$.

- б) Пользуясь тождеством

$$\text{Tr}_{R(2\dots m+1)}(R_2 \dots R_m K_{m+1} \dots K_2) = I_1 \text{Tr}_R(K^m),$$

проверьте, что центральные элементы $p_m(K) = \text{Tr}_R(K^m)$ представляются в пространстве V скалярными операторами

$$p_m(K \triangleright) = \chi_m \text{Id}_V,$$

и найдите коэффициенты χ_m .

2. Определим “обобщенное правило Лейбница” для перестановки генераторов L_i^j и базисных векторов x_i пространства V (см. предыдущую задачу):

$$R_1 L_1 R_1 x_1 = x_1 L_2. \quad (2)$$

- а) Проверьте, что приведенное выше правило Лейбница, дополненное действием генераторов на единичный элемент

$$L_i^j \triangleright e_{\mathcal{L}} = \varepsilon(L_i^j) e_{\mathcal{L}} = \delta_i^j e_{\mathcal{L}}, \quad (3)$$

позволяет определить представление алгебры уравнения отражений (1) в тензорных степенях $V^{\otimes k}$, $\forall k \geq 1$ и найдите явный вид действия генераторов L_i^j в тензорном базисе $R_1 R_2 \dots R_k x_1 x_2 \dots x_k$ пространства $V^{\otimes k}$:

$$L_1 \triangleright R_1 R_2 \dots R_k x_1 x_2 \dots x_k = ?$$

б)* Пользуясь результатом предыдущего пункта задачи, найдите явный вид матрицы $\Omega^{(k)}(R)$, определяющей действие центрального элемента $p_1(L) = \text{Tr}_R(L)$ в пространстве $V^{\otimes k}$:

$$\text{Tr}_R(L) \triangleright x_1 x_2 \dots x_k = \Omega^{(k)}(R)_{12\dots k} x_1 x_2 \dots x_k.$$

Указание. Действие генераторов в пространстве $V^{\otimes k}$ удобно переписать в виде действия “матричной копии” L_{k+1} на стандартный тензорный базис $x_1 x_2 \dots x_k$ и воспользоваться тождеством:

$$\text{Tr}_{R(m+1)}(L_{m+1}) = I_{12\dots m} \text{Tr}_R(L).$$

3. Пространство $V^{\otimes k}$ разлагается в прямую сумму

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} V_{(i)}^\lambda$$

где $V_{(i)}^\lambda = P_{ii}^\lambda(R) V^{\otimes k}$ — образы действия примитивных идемпотентов $P_{ii}^\lambda(R)$ алгебры Гекке $H_k(q)$ в ее R -матричном представлении. Здесь индекс i нумерует стандартные таблицы Юнга, отвечающие данному разбиению $\lambda \vdash k$, d_λ — количество таких таблиц. Докажите, что центральный элемент $p_1(L) = \text{Tr}_R(L)$ в пространствах $V_{(i)}^\lambda$ представляется скалярными операторами:

$$\text{Tr}_R(L \triangleright) = \chi_\lambda \text{Id}_{V_{(i)}^\lambda},$$

где коэффициенты χ_λ зависят только от разбиения λ и не зависят от номера таблицы Юнга i , и найдите явный вид этих коэффициентов.

4. Рассмотрим пространство V^* , двойственное к N -мерному пространству V , введенному в задачах 1 и 2. Пусть $\{y^i\}_{1 \leq i \leq N}$ — базис пространства V^* , двойственный базису $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$

$$\langle x_i, y^j \rangle = \delta_i^j$$

относительно невырожденной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{C}$. Определим “обобщенное правило Лейбница” для перестановки генераторов L_i^j с векторами y^k :

$$L_2 y_1 = y_1 R_1 L_1 R_1. \quad (4)$$

- Докажите, что перестановка (4) вместе с действием (3) задает представление алгебры уравнения отражений в пространстве V^* .
- Постройте представление алгебры уравнения отражений в пространстве $V \otimes V^*$, вычислив действие генераторов на базисных векторах $x_i \otimes y^j$ с помощью “обобщенных правил Лейбница” (2) и (4).
- Пользуясь результатом предыдущего пункта, найдите “обобщенное правило Лейбница” для перестановки генераторов L_i^j с базисными элементами $M_k^s = x_k \otimes y^s$, которое позволит строить представления алгебры уравнения отражений в тензорных степенях $W^{\otimes n}$ пространства $W = V \otimes V^*$.