

### Проективные коники

ГС16♦1. Постройте рациональную параметризацию коник:

- а)  $3x_0^2 + 5x_1^2 + 34x_2^2 + 4x_0x_1 + 12x_0x_2 = 10x_1x_2$  (подсказка: точка  $(-7 : 5 : 2)$  изотропна)
- б)  $x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_0x_2 = 10x_1x_2$       в)  $2x_1^2 + 25x_2^2 + 8x_0x_2 = 2x_0x_1 + 14x_1x_2$ .

ГС16♦2. Коника  $C \subset \mathbb{P}_2$  имеет уравнение  $x_0^2 + x_1^2 + 12x_2^2 - 2x_0x_1 + 10x_0x_2 - 8x_1x_2 = 0$ . Напишите уравнение двойственной коники  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  в двойственном базисе.

ГС16♦3. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

ГС16♦4. Над полем  $\mathbb{C}$  напишите уравнения всех касательных, опущенных из точки  $(1 : 1 : 1)$  на все коники из зад. ГС16♦1-2.

ГС16♦5. Покажите, что для любой неперспективной гомографии  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  на  $\mathbb{P}_2$  существует единственная гладкая коника  $C$ , такая что  $y = \varphi(x)$  если и только если прямая  $(xy)$  касается  $C$ .

ГС16♦6. Каково уравнение гладкой коники  $C$  в базисе  $(e_0, e_1, e_2)$ , если треугольник  $e_0e_1e_2$  а) вписан в  $C$  б) автополярен относительно  $C$ ?

**Поляритет и сопряжение относительно гладкой квадрики.** Гладкая квадрика  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  задаёт линейное биективное полярное преобразование  $\bar{q} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$  переводящее точку  $p \in \mathbb{P}(V)$  в её полярную гиперплоскость<sup>1</sup>  $\mathbb{P}(p^\perp) \subset \mathbb{P}(V)$ . Две точки (соотв. гиперплоскости) называются сопряжёнными относительно  $Q$ , если одна из них лежит на поляре (соотв. проходит через полюс) другой.

ГС16♦7. Опишите полярное преобразование евклидовой плоскости<sup>2</sup>  $\mathbb{R}^2$  относительно «мнимой окружности»  $x^2 + y^2 = -1$ .

ГС16♦8. Докажите, что точки  $a$  и  $b$  прямой, которая пересекает гладкую квадрику  $Q$  в отличных от  $a, b$  точках  $c$  и  $d$ , сопряжены относительно  $Q$  если и только если  $a$  и  $b$  гармоничны  $c$  и  $d$ .

ГС16♦9 (двойное отношение точек на конике). Двойным отношением  $[a, b, c, d]_C$  четырёх различных точек гладкой коники  $C$  называется двойное отношение прямых  $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$  из пучка с центром в какой-либо пятой точке  $p \in C$ . Покажите, что оно не зависит от выбора точки  $p$ , и что две хорды коники  $C$  тогда и только тогда сопряжены относительно  $C$ , когда их концы гармоничны на  $C$ .

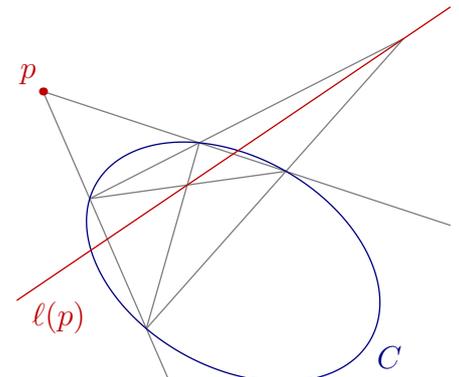


Рис. 1♦1.

ГС16♦10 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 1♦1 построение одной линейкой поляры  $\ell(p)$  данной точки  $p$  относительно данной коники  $C$ .

ГС16♦11. Одной линейкой постройте полярю данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно данной окружности в случае, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри очерчиваемого окружностью круга.

ГС16♦12. Назовём гомографией на гладкой конике  $C$  любую сохраняющую двойное отношение биекцию  $\gamma : C \simeq C$ . Покажите, что если  $\gamma$  не является инволюцией, то ГМТ пересечения прямых  $(x\gamma(y)) \cap (y\gamma(x))$ , где  $x \neq y$  независимо пробегает  $C$ , это прямая, пересекающая конику  $C$  в точности по неподвижным точкам гомографии  $\gamma$ . Одной линейкой постройте неподвижные точки гомографии  $C \simeq C$ , если задано её действие на 3 разные точки.

<sup>1</sup>Или полярю. Точка  $p$  называется полюсом гиперплоскости  $\mathbb{P}(p^\perp)$ .

<sup>2</sup>Вложенной в  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  в виде стандартной карты  $U_0$