

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ АНДУ-2024, часть 2

Лектор Ю.С.Ильяшенко

1. Докажите, что если (в обозначениях лекции 8) $f = f_0 + O(z^{m+2})$ при $z \rightarrow 0$, то $\tilde{f} = t + 1 + O(t^{-m})$ при $t \rightarrow \infty$.
2. Пусть $F(t) = O(t^{-m})$, $m \geq 2$. Тогда в секторе $|\arg t| < \frac{3\pi}{4}$, $|t| > R$ при достаточно большом R и $|t| > 2R$ выполнено:

$$\left| \sum_0^{\infty} F \circ (t + 1 + F)^k \right| = O(t^{-m+1});$$

степень k -итерационная.

3. Докажите, что квазиконформное отклонение при отображении одной РП на другую не зависит от выбора локальных координат в образе и прообразе.
4. Докажите, что для любого открытого покрытия римановой поверхности существует подчиненное ему разбиение единицы.
5. Докажите, что все кольца попарно квазиконформно эквивалентны.
6. Докажите, что из трех римановых поверхностей: проколотый круг, кольцо, сфера Римана без двух точек - любые две диффеоморфны, и никакие две квазиконформно неэквивалентны.
7. (ренормализация Дуади - Жиса). Пусть $f : z \mapsto e^{i\alpha}z + \dots$, $\alpha \in (0, \pi)$ - росток конформного отображения. Пусть $\Gamma = f(R^+)$. Рассмотрим "сектор" между Γ и R^+ и склеим его боковые границы, отождествляя точки z и $f(z)$.

а) Докажите, что на склеенной поверхности можно ввести комплексную структуру, в которой z - голоморфная функция вне склеенных кривых.

Указание. Рассмотрите сначала частный случай $f(z) = e^{i\alpha}z$.

б) Докажите, что полученная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна проколотому кругу.

Указание. Докажите сначала квазиконформную эквивалентность.

8. Докажите, что если матричнозначная функция $Z(t)$ имеет регулярную особенность в нуле, то Z^{-1} и \dot{Z} имеет такую же особенность.
9. Докажите, что для одномерного линейного уравнения регулярность особых точек равносильна фуксовости.
10. Уравнение Эйлера имеет вид

$$t^n z^{(n)} + \dots + a_k t^k z^{(k)} + \dots + a_0 z = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Когда набор функций $t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}$ является фундаментальной системой решений? Найдите фундаментальную систему решений в общем случае.