Семинар 12
Расслоения 1

1. Убедиться, что конструкция Склейки тривиальных расслоений с помощью заданного гладкого коцикла приводит к векторному расслоению.

2. Доказать, что всякое векторное расслоение эквивалентно расслоению типа Склейка.

3. Докажите, что векторное расслоение ранга n тривиально тогда и только тогда, когда существуют n его сечений, линейно независимых в каждой точке базы.

4. Доказать, что касательное расслоение к окружности тривиально.

5. Доказать, что касательное расслоение всякой группы Ли тривиально. В частности, показать, что касательное расслоение к трехмерной сфере тривиально.

6. Покроем сферу $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ шестью картами $U_{\pm}(X) = (X > 0, X < 0)$, $U_{\pm}(Y)$, $U_{\pm}(Z)$. Найти матрицу перехода $g_{U_+(X),U_+(Z)}$ касательного расслоения TS^2.

7. В атласе предыдущей задачи вычислить матрицы перехода расслоения $T(T(S^2))$.

8*. Касательное расслоение TS^2 нетривиально (весьма нетривиальный факт, доказанный,например, в книге Я. И. Перельмана "Занимательная K-теория").

Тавтологическое расслоение над проективным пространством $P(V)$, рассматриваемым как пространство одномерных подпространств $l \in V$ векторного пространства V.

9. Пусть E подпространство в прямом произведении $P(V) \times V$, состоящее из пар $(([l], v)|v \in l)$. Доказать, что $\varphi\colon E \to P(V) : \varphi([l], v) = [l]$ является линейным расслоением над проективным пространством. Это расслоение нетривиально (в майских лекциях есть другой способ описания этого расслоения). Аналогично строится тавтологическое расслоение над любым Грассманианом (как?).

10*. Сколько существует неэквивалентных линейных расслоений над окружностью?