Листок 9

1. Пусть f — голоморфная функция на единичном круге $\{z\colon |z|<1\}$, и пусть известно, что

$$f(1/n) = \frac{2n+1}{3n+1} \quad \text{для всех целых } n \geqslant 2.$$

Чему может равняться $f(2/3)$?

2. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое и связное множество, и пусть $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции, не равные тождественно нулю. Покажите, что их произведение fg также не равно тождественно нулю (иными словами, кольцо голоморфных функций на открытом и связном множестве является целостным)

3. Пусть $\bar{D} = \{z\colon |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный диск и $\partial D = \{z\colon |z| = 1\}$ — единичная окружность, а функция f непрерывна на $\bar{D}$ и голоморфна в его внутренности. Покажите, что если f тождественно равна нулю на некоторой дуге в ∂D, то она тождественно равна нулю всюду. (*Указание.* Конечным числом сдвигов данной дуги можно покрыть всю окружность.)

4. а) В обозначениях задачи 3 приведите пример непрерывной функции на ∂D, которую нельзя продолжить до функции, непрерывной на $\bar{D}$ и голоморфной в его внутренности.

б) Можете ли вы дать необходимое и достаточное условие возможности такого продолжения?

5. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$, и при этом $\operatorname{Re} f(z) > 0$ для всех $z \in D^*$.

(а) Может ли f иметь в точке 0 существенную особенность?

(б) Может ли f иметь в точке 0 полюс?

6. Пусть P — многочлен степени $n > 1$ без кратных корней; обозначим его корни через $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что если k — целое число, $0 \leqslant k \leqslant n-2$, то

$$\frac{a_1^k}{P'(a_1)} + \ldots + \frac{a_n^k}{P'(a_n)} = 0.$$

7. Пусть f голоморфна в проколотом круге $D^* = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $f(z) = O(\ln(1/|z|))$ при $z \to 0$. Что можно сказать об изолированной особенности функции f в нуле?

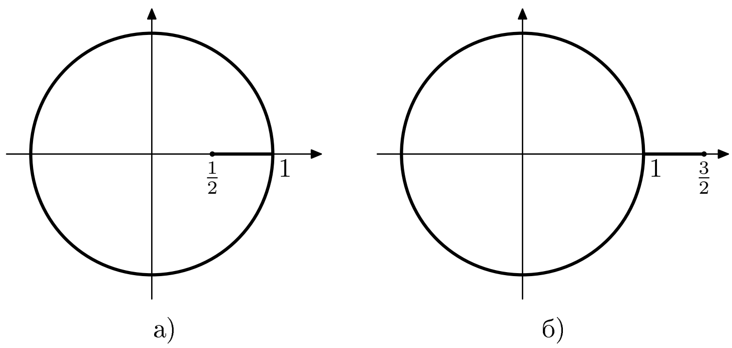

Рис. 1:

8. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — мероморфные функции на открытом и связном подмножестве $U \subset \mathbb{C}$. *Вронскианом* функций $f_1, \ldots, f_n$ называется функция

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Покажите, что $W(f_1, \ldots, f_n)$ тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда функцити $f_1, \ldots, f_n$ линейно зависимы: а) для $n = 2$; б) для произвольного n.

9. (а) Пусть функция f непрерывна в круге $\bar{D} = \{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Может ли образ единичной окружности $\bar{D} = \{z\colon |z| = 1\}$ при отображении f быть множеством, обозначенным жирными линиями на рис. 1а (объединение окружности и отрезка)?

(б) Тот же вопрос для рис. 1б.

10. Постройте конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность правильного треугольника (хоть какого-нибудь: размеры и расположение на плоскости неважны).

11. Существует ли конформное отображение между внутренностью квадрата и внутренностью прямоугольника с отношением сторон $1 : 2$, которое при соответствии границ переводит вершины в вершины? (*Указание.* Принцип симметрии.)

12. Существует ли конформное отображение между внутренностью правильного треугольника и внутренностью равнобедренного прямоугольного треугольника, которое при соответствии границ переводит вершины в вершины? (*Указание.* Не спешите с ответом!)

13. Рассмотрим кольца

$$U_1 = \{z\colon r_1 < |z| < R_1\} \quad \text{и} \quad U_2 = \{z\colon r_2 < |z| < R_2\}.$$

Докажите, что U_1 и U_2 конформно изоморфны тогда и только тогда, когда $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

14. Существует ли конформный изоморфизм между открытым множеством

$$U = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1,\ \left|z - \frac{2}{5}\right| > \frac{2}{5}\}.$$

и каким-нибудь кольцом вида $\{z \colon r < |z| < R\}$, где $0 < r < R$?

15. Докажите, что не существует квазиконформного диффеоморфизма из $\mathbb{C}$ на единичный круг $D = \{z \colon |z| < 1\}$.