**Семинар 13.**

Задачи 1 и 2 – это задачи 4 и 5 из задания к семинару 12.

**Задача 1.** Докажите, что в условиях и обозначениях задачи 3 из задания к семинару 12 для общей точки $a \in X$ верны следующие утверждения.
1) Кривая $\widetilde{C}_a = X \cap P_a X$ имеет в $a$ обыкновенную двойную точку с теми же касательными $l'_a$ и $l''_a$ к ее ветвям в точке $a$, что и кривая $Y_a$, и не имеет других особых точек.
2) Кривая $\widetilde{C}_a$ имеет степень 6. (Степенью пространственной кривой в $\mathbb{P}^3$ называется число ее точек пересечения с общей плоскостью в $\mathbb{P}^3$.)

**Задача 2.** В условиях и обозначениях задачи 1 пусть $\mathbb{P}^2$ – произвольная плоскость в $\mathbb{P}^3$, не проходящая через точку $a$, и $p: \ \widetilde{C}_a \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{P}^2, \ x \mapsto \langle a, x\rangle \cap \mathbb{P}^2$ – проекция на плоскость $\mathbb{P}^2$. Обозначим через $C_a$ замыкание в $\mathbb{P}^2$ образа $\mathrm{im}(p)$ проекции $p$.
(i) Покажите, что $C_a$ – гладкая плоская кривая степени 4 (квартика). Согласно задаче 1 кривая $C_a$ имеет 28 двойных касательных.
(ii) Убедитесь, что прямая $m_0 = \mathbb{T}_a X \cap \mathbb{P}^2$ является двойной касательной к кривой $C_a$ с точками касания $b' = l'_a \cap \mathbb{P}^2$ и $b'' = l''_a \cap \mathbb{P}^2$.
(iii) Пусть $l$ – произвольная прямая на $X$, $D$. Плоскость $\mathbb{P}^2_l = \langle a, l\rangle$ пересекает кубику $X$ по распавшейся кривой $l \cup D$, где $D$ – коника, проходящая через точку $a$. Пусть $d_1$ и $d_2$ – точки пересечения $D$ с $l$. Покажите, что прямая $m = \mathbb{P}^2_l \cap \mathbb{P}^2$ является двойной касательной к кривой $C_a$ с точками касания $b_1 = \langle a, d_1\rangle$ и $b_2 = \langle a, d_2\rangle$.
(iv) Убедитесь, что не существует других двойных касательных к $C_a$, кроме $m_0$ и проекций прямых $l \subset X$ на плоскость $\mathbb{P}^2$, описанные в задаче (iii) выше. Как следствие, на $X$ имеется 27 прямых.

**Пространство коник на плоскости. Кубический симметроид и поверхность Веронезе**
Пусть $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$, где $\dim_{\mathbf{k}V} = 3$, $(e) = (e_0, e_1, e_2)$ базис в $V$, $(x_0, x_1, x_2)$ – координаты в базисе $(e)$ и $(x_0 : x_1 : x_2)$ – соответствующие координаты в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим пространство $S^2V^\vee$ квадратичных форм (то есть однородных многочленов степени 2 от переменных $x_0, x_1, x_2$). Произвольная ненулевая форма $F \in S^2V^\vee$ имеет вид $F = F_A = \sum_{i=0}^{2} a_{ij} x_i x_j$, где $A = (a_{ij})$ – ненулевая симметрическая матрица $3 \times 3$. При этом класс пропорциональности $\langle A\rangle = \langle a_{ij}\rangle := (a_{00} : a_{11} : a_{22} : a_{01} : a_{02} : a_{12})$ матрицы $A$ является точкой проективного пространства $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S^2V^\vee)$ и одновременно биективно соответствует конике $C = C_A := V(F_A)$ в $\mathbb{P}^2$. Поэтому пространство $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S^2V^\vee)$ называется *пространством коник в плоскости* $\mathbb{P}^2$.
В пространстве коник $\mathbb{P}^5$ рассмотрим подмножество $\Delta := \{\langle A\rangle = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^5 \mid \mathrm{rk} A \leqslant 2\} = V(\det(a_{ij}))$. Это гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^5$, поскольку определитель $\det(a_{ij})$ как многочлен от однородных координат $(a_{00} : \ldots : a_{12})$ в $\mathbb{P}^5$ имеет степень 3. Заметим, что, как мы знаем, условие $\mathrm{rk} A \leqslant 2$ на матрицу $A$ означает, что коника $C_A$ распадается в пару прямых $l_1 \cup l_2$ (возможно, совпавших). Этой (неупорядоченной) паре прямых $(l_1, l_2)$ в $\mathbb{P}^2$ биективно соответствует неупорядоченная пара точек $(\check{l}_1, \check{l}_2)$ (возможно, совпавших) в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, то есть, по определению, точка в симметрическом квадрате $S^2\check{\mathbb{P}}^2$ плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Таким образом, гиперповерхность $\Delta$ биективна $S^2\check{\mathbb{P}}^2$, и ее точки соответствуют распавшимся коникам в $\mathbb{P}^2$. $\Delta$ называется *кубическим симметроидом.*
В $S^2\check{\mathbb{P}}^2$ рассмотрим диагональ $D_\Delta = \{(x_1, x_2) \in S^2\check{\mathbb{P}}^2 \mid x_1 = x_2\}$. $D_\Delta$ биективна $\check{\mathbb{P}}^2$, а значит, $D_\Delta$ – поверхность. При биекции $S^2\check{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{\sim} \Delta$ диагонали $D_\Delta$ соответствует на $\Delta$ поверхность $\mathcal{V} := \{C = C_A \in \Delta \mid C_A$ *– сдвоенная прямая*$\}$. Она называется *поверхностью Веронезе.* Композиция $v: \ \check{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V} \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ называется *отображением Веронезе.* По построению отображение Веронезе $v$ – вложение.

**Задача 3.** Пусть $(u_0 : u_1 : u_2)$ – координаты в $\check{\mathbb{P}}^2$, двойственные координатам $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$. Найдите формулы отображения Веронезе $v: \ \check{\mathbb{P}}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ в координатах $(u_0 : u_1 : u_2)$ и $(a_{00} : \ldots : a_{12})$.

**Задача 4.** 1) Докажите, что через всякую точку $x \in \Delta^* := \Delta \smallsetminus \mathcal{V}$ проходит хорда поверхности Веронезе $\mathcal{V}$, эта хорда лежит на $\Delta$.
2) Найдите геометрическое место всех таких хорд, то есть множество всех точек в $\mathbb{P}^5$, лежащих на хордах поверхности $\mathcal{V}$ через точку $x$.

**Задача 5.** 1) Найдите все семейства плоскостей на $\Delta$.
2) Докажите, что $\mathcal{V} = \mathrm{Sing}(\Delta)$.