Семинар 11.

В этом задании задачи 1-4 взяты из семинара 10.

Задача 1. Пусть X – гладкая кривая в $\mathbb{P}^2$ степени $\mathbf{d} = \deg X > 1$. Докажите, что двойственная кривая $\check{X}$ в $\check{\mathbb{P}}^2$ имеет степень $\mathbf{d}(\mathbf{d}-1)$.

Задача 2. Докажите, что образ на двойственной кривой $\check{X}$ точки простого перегиба на X является обыкновенным острием. Докажите обратное утверждение.

Задача 3. Пусть кривая X степени $\mathbf{d}$ имеет только точки простого перегиба $a_1, ..., a_\gamma$. Докажите, что тогда ее гессиан $He(X)$ неособ в каждой точке a_i и пересекает X трансверсально в ней. Пользуясь этим, найдите число γ точек перегиба кривой X.

Задача 4. Пусть b - простое острие на кривой X. Докажите, что для общей (то есть почти любой) точки $a \in \mathbb{P}^2$ поляра $P_a(X)$ неособа в точке b и касается в a выделенной касательной прямой к X в точке b. (Слово "общая"(или "почти любая") точка $a \in \mathbb{P}^2$ означает, что эта точка принадлежит непустому открытому подмножеству в $\mathbb{P}^2$.) Докажите, что в этом случае кратность пересечения поляры $P_a(X)$ общей точки $a \in \mathbb{P}^2$ с кривой X в точке b равна 3:

$$(P_a(X) \cdot X)_b = 3.$$

Замкнутым подмножеством алгебраического многообразия X будем называть всякое подмножество в X, точки которого удовлетворяют некоторому набору (не обязательно конечному) алгебраических уравнений. *Открытым подмножеством* алгебраического многообразия X будем называть всякое подмножество в X, дополнение к которому замкнуто. Алгебраическое многообразие X называется *неприводимым*, если оно не представляется в виде $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 – *различные* замкнутые подмножества в X, отличные от X. Для любого неприводимого многообразия X определена его *размерность*, обозначаемая $\dim X$. Если Z – открытое подмножество некоторого замкнутого подмножества $\widetilde{Z}$ проективного пространства, то Z называется *квазипроективным множеством.* Если при этом множество $\widetilde{Z}$ неприводимо и Z непусто, то корректно определена размерность $\dim Z$ множества Z и она совпадает с $\dim \widetilde{Z}$.

Для решения задачи 5 полезно воспользоваться так называемым *принципом счета параметров* или *теоремой о размерности слоев*. В формулировке этой теоремы используется термин "общая" (или "почти любая") точка. Говорят, что некоторое утверждение о точках неприводимого многообразия X выполняется в ***общей** (или **почти любой**) **точке*** многообразия X, если в X существует такое плотное открытое множество U, что данное утверждение верно для всех точек множества U.

Теорема о размерности слоев. *Пусть $f : X \to Y$ – регулярное сюръективное отображение неприводимых многообразий. Тогда размерности многообразий X и Y связаны соотношением*

$$\dim X = \dim Y + \dim f^{-1}(y),$$

*где $f^{-1}(y)$ – слой отображения f над **общей** точкой y многообразия Y.*

Задача 5. Каждую кривую X степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$ будем рассматривать как точку X в пространстве $\mathbb{P}^N$ всех плоских кривых степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$ (здесь $N = \frac{1}{2}\mathbf{d}(\mathbf{d}+3)$). Докажите следующие утверждения.
(i) Общая гладкая кривая X степени $\mathbf{d} \geqslant 4$ в $\mathbb{P}^2$ имеет непустое конечное число простых двойных касательных.
(ii) Пусть Y – подмножество в $\mathbb{P}^N$ всех гладких кривых $X \subset \mathbb{P}^2$, имеющих двойные касательные прямые l с двумя различными точками касания a и b такими, что хотя бы одна из кратностей пересечения $(X \cdot l)_a$ и $(X \cdot l)_b$ не меньше 3. Тогда Y – квазипроективное подмножество в $\mathbb{P}^N$, а его замыкание $\overline{Y}$ (то есть наименьшее замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^N$, содержащее Y) является собственным (то есть отличным от $\mathbb{P}^N$) замкнутым подмножеством в $\mathbb{P}^N$.
(iii) Пусть Y – подмножество в $\mathbb{P}^N$ всех гладких кривых $X \subset \mathbb{P}^2$, имеющих тройные касательные

прямые l с тремя различными простыми точками касания a_1, a_2 и a_3(то есть такими, что $(X\cdot l)_{a_i}=2$, $i=1,2,3$). Тогда для Y верно то же утверждение, что и в (ii) выше.
(iv) Общая гладкая кривая X степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$ имеет только три типа касательных прямых l:
1) l является простой касательной к X, то есть по определению l имеет двукратное (то есть простое) касание с X в одной точке и трансверсальное пересечение с X во всех остальных точках из $X\cap l$,
2) l есть касательная простого перегиба, то есть по определению l имеет трехкратное касание с X в одной точке a (а значит, a – точка простого перегиба на X) и трансверсальное пересечение с X во всех остальных точках из $X\cap l$,
3) l является простой двойной касательной к X, то есть по определению l имеет простое касание в двух точках и трансверсальное пересечение с X во всех остальных точках из $X\cap l$.
(Напомним, что пересечение кривой X с прямой l в точке a называется *трансверсальным*, если $(X\cdot l)_a=1$.)

Задача 6. Выведите следующие формулы Плюккера.
(i) Пусть X – гладкая кривая степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$. Тогда степень двойственной кривой $\check{X}$ находится по формуле Плюккера

$$\deg\check{X}=\mathbf{d}(\mathbf{d}-1). \tag{1}$$

(ii) Пусть кривая X степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$ имеет в качестве особенностей только δ обыкновенных двойных точек и κ простых острий. Тогда степень двойственной кривой $\check{X}$ находится по формуле Плюккера

$$\deg\check{X}=\mathbf{d}(\mathbf{d}-1)-2\delta-3\kappa. \tag{2}$$

(iii) Пусть X – общая гладкая кривая в $\mathbb{P}^2$, имеющая согласно задаче 5(iv) только $\check{\delta}$ простых двойных касательных и $\check{\kappa}$ точек простого перегиба. Тогда степень $\mathbf{d}$ кривой X связана со степенью двойственной кривой $\check{X}$ формулой Плюккера

$$\mathbf{d}=\deg\check{X}(\deg\check{X}-1)-2\check{\delta}-3\check{\kappa}. \tag{3}$$