Семинар 12.

Задача 1. Пусть X - гладкая кривая степени $\mathbf{d}$ в $\mathbb{P}^2$, имеющая, помимо обычных касательных прямых, еще $\check{\delta}$ простых двойных касательных, и пусть она имеет в качестве точек перегиба только точки простого перегиба. Докажите, что число $\check{\delta}$ простых двойных касательных кривой X находится по формуле

$$\check{\delta} = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{d}-2)(\mathbf{d}^2-9)}{2}. \tag{1}$$

Задача 2. Пользуясь теоремой о размерности слоев, докажите, что на общей гладкой кубической поверхности X в пространстве $\mathbb{P}^3$ имеется конечное число прямых. Для этого, в частности, необходимо найти хотя бы одну такую кубику X (не обязательно гладкую), на которой имеется конечное число прямых. Конкретным примером такой кубики может служить кубика X_0 с аффинным уравнением $xyz = 1$. Проверьте, что на X_0 имеется конечное число прямых.

Задача 3. Пусть X – гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{T}_a X$ – касательная плоскость к X в точке $a \in X$, и $Y_a = X \cap \mathbb{T}_a X$ – плоская кубическая кривая. Докажите, что для общей гладкой кубики X и общей точки $a \in X$ кривая Y_a имеет в a обыкновенную двойную точку (с касательными l'_a и l''_a к ее ветвям в точке a) и не имеют других особых точек.

Задача 4. Докажите, что в условиях и обозначениях задачи 3 для общей точки $a \in X$ верны утверждения.
1) Кривая $\widetilde{C}_a = X \cap P_a X$ имеет в a обыкновенную двойную точку с теми же касательными l'_a и l''_a к ее ветвям в точке a, что и кривая Y_a, и не имеет других особых точек.
2) Кривая $\widetilde{C}_a$ имеет степень 6. (Степенью пространственной кривой в $\mathbb{P}^3$ называется число ее точек пересечения с общей плоскостью в $\mathbb{P}^3$.)

Задача 5. В условиях и обозначениях задачи 4 пусть $\mathbb{P}^2$ – произвольная плоскость в $\mathbb{P}^3$, не проходящая через точку a, и $p: \ \widetilde{C}_a \setminus \{a\} \to \mathbb{P}^2, \ x \mapsto \langle a, x\rangle \cap \mathbb{P}^2$ – проекция на плоскость $\mathbb{P}^2$. Обозначим через C_a замыкание в $\mathbb{P}^2$ образа $\mathrm{im}(p)$ проекции p.
(i) Покажите, что C_a – гладкая плоская кривая степени 4 (квартика). Согласно задаче 1 кривая C_a имеет 28 двойных касательных.
(ii) Убедитесь, что прямая $m_0 = \mathbb{T}_a X \cap \mathbb{P}^2$ является двойной касательной к кривой C_a с точками касания $b' = l'_a \cap \mathbb{P}^2$ и $b'' = l''_a \cap \mathbb{P}^2$.
(iii) Пусть l – произвольная прямая на X, D. Плоскость $\mathbb{P}^2_l = \langle a, l\rangle$ пересекает кубику X по распавшейся кривой $l \cup D$, где D – коника, проходящая через точку a. Пусть d_1 и d_2 – точки пересечения D с l. Покажите, что прямая $m = \mathbb{P}^2_l \cap \mathbb{P}^2$ является двойной касательной к кривой C_a с точками касания $b_1 = \langle a, d_1\rangle$ и $b_2 = \langle a, d_2\rangle$.
(iv) Убедитесь, что не существует других двойных касательных к C_a, кроме m_0 и проекций прямых $l \subset X$ на плоскость $\mathbb{P}^2$, описанные в задаче (iii) выше. Как следствие, на X имеется 27 прямых.