Семинар 14 (готовимся к июньскому ОГЭ)

Производная векторного поля X в $\mathbb{R}^n$ в точке p по направлению вектора v в этой точке. Обозначение $\nabla_v X(p)$.

1. Убедитесь, что упомянутое дифференцирование обладает перечисленными свойствами связности Леви-Чивита в $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$:
a) $\nabla_v(Y+X) = \nabla_v Y + \nabla_v X$;
b) $\nabla_v fX(p) = (\nabla_v f)X(p) + f(p)\nabla_v X$;
c) $\nabla_v(X,Y) = (\nabla_v X, Y) + (X, \nabla_v Y)$.

2. Вычислить $\nabla_v X$, если координаты поля X в $\mathbb{R}^2$ равны $x_1x_2, {x_2}^2$, а координаты вектора v в точке $(1,0)$ равны $(0,1)$.

3. Пусть X – гладкое единичное векторное поле, заданное на гладкой гиперповерхности $S \subset (\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$. Доказать, что $\nabla_v X \perp X(p)$ для всех $v \in T_pS$, $p \in S$.

Оператор формы L на гиперповерхности

4. Вычислить оператор формы для гиперплоскости $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4$ и для цилиндра ${X_2}^2 + 3{X_3}^2 = 4$.

5. Гладкая гиперповерхность S задана в $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$ уравнением $f = 0$ и ориентирована единичным полем нормалей $N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. В точке $p \in S$ вектор $N = e_n = (0, 0, \dots 1)$. Найти матрицу оператора формы в этой точке в базисе $e_1, e_2, \dots, e_{(n-1)}$.

6. Пусть S – гладкая гиперповерхность в $(\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$, ориентированная единичным полем нормалей N, а X, Y – касательные векторные поля на S. Доказать, что $(\nabla_X Y, N) = (\nabla_Y X, N)$ в любой точке на S.

7. Доказать, что в реалиях задачи 6, поле $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ касается поверхности S.

Самостоятельно вычисляем главные кривизны и КРИВИЗНУ ГАУССА поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве

8. Найти главные кривизны (если сможете) и кривизну Гаусса (обязательно) поверхностей: $X^2 - Y^2 = Z$, $X^2 + Y^2 = Z$, $X^2 + Y^2 + 5Z^2 = 1$.