Семинар 14.

В этом задании сохраняются обозначения из задания к семинару 13. В частности, пространство $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(S^2V^\vee)$, где $\dim_{\mathbf{k}} V = 3$, есть пространство коник на плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$. При этом, если $C = V(\sum_{i=0}^{2} a_{ij}x_ix_j)$ – коника в $\mathbb{P}^2$, где (a_{ij}) – симметрическая матрица 3×3, то естественно в качестве проективных координат $(v_0 : ... : v_5)$ коники C как точки в $\mathbb{P}^5$ брать координаты $(a_{00} : a_{11} : a_{22} : a_{01} : a_{02} : a_{12})$.
Отметим также, что пространство $\check{\mathbb{P}}^5 = \mathbb{P}(S^2V)$, двойственное к $\mathbb{P}^5$, естественным образом является пространством коник в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$.

Задача 1. Докажите, что на кубическом симметроиде Δ нет других прямых, кроме хорд поверхности Веронезе $\mathcal{V}$.

Задача 2. 1) Докажите, что образом произвольной прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ при отображении Веронезе $v: \ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}$ является коника $D = v(l)$ на поверхности Веронезе $\mathcal{V}$, а плоскость, натянутая на D, лежит на Δ.
2) Докажите обратное: всякая коника D на поверхности Веронезе $\mathcal{V}$ является образом некоторой прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ при отображении Веронезе v.

Задача 3. Пусть $\Delta = V(F(v_0, ..., v_5))$, где $F = \det(a_{ij})$ – кубическая форма, задающая симметроид Δ, записанная в вышеуказанных координатах $(v_0 : ... : v_5)$. Симметроид Δ как гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$ определяет полярное отображение

$$p_\Delta: \ \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^5, \quad (v_0 : ... : v_5) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial v_0} : ... : \frac{\partial F}{\partial v_5})$$

(Заметим, что отображение p_Δ не определено в точках поверхности Веронезе $\mathcal{V}$, так как эти точки являются особыми на Δ (см. задачу 5 к заданию 13), поэтому в этих точках все частные производные $\frac{\partial F}{\partial v_i}$, $i = 0, ..., 5$, обращаются в нуль. Поэтому как регулярное отображение p_Δ определено только на $\mathbb{P}^5 \smallsetminus \mathcal{V}$.)
Докажите, что образом точки в $\mathbb{P}^5$, соответствующей конике $C \subset \mathbb{P}^2$, при при полярном отображении p_Δ является точка в $\check{\mathbb{P}}^5$, соответствующая конике $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$, двойственной к конике C.

Пространство полных коник на плоскости. Рассмотрим график Γ полярного отображения $p_\Delta : \mathbb{P}^5 \smallsetminus \mathcal{V} \to \check{\mathbb{P}}^5$, то есть множество

$$\Gamma = \{(C, p_\Delta(C)) \in (\mathbb{P}^5 \smallsetminus \mathcal{V}) \times \check{\mathbb{P}}^5 \mid C \in \mathbb{P}^5 \smallsetminus \mathcal{V}\}$$

Γ является подмножеством в $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$, и его замыкание $\overline{\Gamma}$ в $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ является неприводимым проективным многообразием (то есть может быть реализовано как замкнутое подмножество проективного пространства подходящей размерности). Это многообразие $\overline{\Gamma}$ называется *пространством (или многообразием) полных коник на плоскости* $\mathbb{P}^2$. При этом проекции прямого произведения $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ на сомножители $\mathbb{P}^5$ и $\check{\mathbb{P}}^5$ определяют проекции многообразия полных коник

$$\mathbb{P}^5 \xleftarrow{p} \overline{\Gamma} \xrightarrow{q} \check{\mathbb{P}}^5.$$

По определению графика Γ проекция $p|_\Gamma : \ \Gamma \to \mathbb{P}^5 \smallsetminus \mathcal{V}$ является биекцией Действительно, по определению графика Γ, $p^{-1}(C) = (C, p_\Delta(C)) = (C, \check{(C)})$ – точка в Γ. Поэтому регулярное отображение $p: \ \overline{\Gamma} \to \mathbb{P}^5$ биективно над общей точкой $C \in \mathbb{P}^5$. (Такие отображения называются бирациональными.)

Задача 4. Пусть $D = p^{-1}(\mathcal{V})$. Покажите, что D имеет размерность 4, то есть имеет коразмерность 1 в 5-мерном многообразии $\overline{\Gamma}$. (Подмногообразие коразмерности 1 называется *дивизором* в объемлющем многообразии.) Для этого достаточно убедиться, что для любой коники $C = 2l$ (то есть сдвоенной прямой l), рассматриваемой как точка $\{2l\}$ на поверхности Веронезе $\mathcal{V}$, слой $p^{-1}(\{2l\})$ имеет следующее геометрическое описание:

$$p^{-1}(\{2l\}) = S^2l = S^2\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}^2. \tag{1}$$

(Отсюда тот факт, что D – дивизор в $\overline{\Gamma}$, вытекает по теореме о размерности слоев.)

Задача 5. Рассмотрим множество $\widehat{\Delta} = p^{-1}(\Delta)$. Так как $\Delta \supset \mathcal{V}$, то $\widehat{\Delta} \supset D$. Рассмотрим замыкание $\widetilde{\Delta}$ множества $\widehat{\Delta} \setminus D$ в $\overline{\Gamma}$. По построению $\sigma = p|_{\widetilde{\Delta}} : \widetilde{\Delta} \to \Delta$ – регулярное бирациональное отображение, биективное над $\Delta^* = \Delta \setminus \mathcal{V}$. При этом $\dim \widetilde{\Delta} = \dim \Delta = 4$, так что $\widetilde{\Delta}$ – дивизор в $\overline{\Gamma}$. Кроме того, слой бирационального отображения $\sigma = p|_{\widetilde{\Delta}} : \widetilde{\Delta} \to \Delta$ над точкой $\{2l\} \in \mathcal{V}$ лежит в слое $p^{-1}(\{2l\})$, причем по определению

$$\sigma^{-1}(\{2l\}) = \widetilde{\Delta} \cap p^{-1}(\{2l\}).$$

Покажите, что при отождествлении по формуле (1) слоя $p^{-1}(\{2l\})$ с проективной плоскостью $\mathbb{P}^2 \simeq S^2 l$ слой $\sigma^{-1}(\{2l\})$ отождествляется с коникой (диагональю) $\{(x, x) \in S^2 l \mid x \in l\}$ в $\mathbb{P}^2$.