

**Задачи для подготовки к контрольной № 7 и экзамену**

**ПК7♦1.** Постройте рациональные параметризации аффинных коник

- а)  $-4x^2 + 28xy + 8x - 28y^2 - 12y - 1 = 0$
- б)  $-12x^2 - 44xy - 65y^2 + 10y - 1 = 0$
- в)  $-20x^2 - 36xy - 8x - 28y^2 - 4y - 1 = 0.$

ОТВЕТ: а)  $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{2t - 1}{t^2 + 1}$ ; б)  $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{2t - 1}{t^2 + 1}$ ; в)  $x = \frac{1}{5} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 1}, y = \frac{2t - 1}{t^2 + 1}$

**ПК7♦2.** Доподлинно выясните, совпадают ли Ваши ответы к предыдущей задаче с указанными в ней ответами с точностью до дробно линейного преобразования параметра  $t$ .

**ПК7♦3.** Для гомографии  $\varphi : \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$  найдите прообраз точки

- а)  $13/23$ , если  $\varphi$  переводит  $1/2$  в  $4/7$ ,  $4/7$  в  $29/51$ , а  $5/8$  в  $17/30$ ,
- б)  $-62/35$ , если  $\varphi$  переводит  $-1/3$  в  $-7/4$ ,  $-2/7$  в  $-16/9$ , а  $-3/10$  в  $-23/13$ ,
- в)  $-76/163$ , если  $\varphi$  переводит  $-1/3$  в  $-1/2$ ,  $-2/7$  в  $-8/17$ , а  $-5/18$  в  $-7/15$ .

ОТВЕТ: а)  $1/2$ ; б)  $-1/3$ ; в)  $-1/3$

**ПК7♦4.** Найдите неподвижные точки инволюции  $\sigma : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \sigma^2 = \text{Id}$ , если

- а)  $\sigma(-4) = \infty$ , а  $\sigma(-1) = 3/2$
- б)  $\sigma(2/3) = 3$ , а  $\sigma(-2/3) = 1/4$
- в)  $\sigma(2) = 1$ , а  $\sigma(4/3) = 4$ .

ОТВЕТ: а)  $1, -3$ ; б)  $1, -3$ ; в)  $1, -3$

**ПК7♦5.** Найдите косинус меньшего из двух смежных углов между касательными прямыми

- а) опущенными на конику  $-60x^2 - 52xy - 64x - 12y^2 - 28y - 17 = 0$  из точки  $(0, -1)$
- б) опущенными на конику  $-5x^2 - 18xy - 6x + 7y^2 - 2y - 1 = 0$  из точки  $(-1/3, -1/6)$
- в) опущенными на конику  $15x^2 + 56xy - 22x + 12y^2 - 28y + 7 = 0$  из точки  $(2/5, 1/5)$

ОТВЕТ: а)  $1/5$ ; б)  $1/5$ ; в)  $1/5$

**ПК7♦6.** Напишите уравнения касательных прямых, опущенных на конику

- а)  $20x^2 + 60xy + 4x - y^2 + 12y = 0$  из точки  $(-\frac{3}{14}, \frac{1}{14})$
- б)  $-17x^2 + 66xy + 30x - 65y^2 - 58y - 13 = 0$  из точки  $(0, -\frac{1}{2})$
- в)  $-24x^2 - 32xy - 12x - 9y^2 - 10y - 1 = 0$  из точки  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

ОТВЕТ: а)  $20x^2 + 60xy + 4x - y^2 + 12y = 0$ ; б)  $-17x^2 + 66xy + 30x - 65y^2 - 58y - 13 = 0$ ; в)  $-24x^2 - 32xy - 12x - 9y^2 - 10y - 1 = 0$

**ПК7♦7.** Найдите точки, в которых касательные прямые, опущенные на конику

- а)  $-81x^2 + 64xy + 66x + 8y^2 - 20y - 13 = 0$  из точки  $(\frac{5}{14}, -\frac{1}{7})$
- б)  $-13x^2 + 28xy + 4x - 16y^2 - 4y = 0$  из точки  $(1, \frac{2}{3})$
- в)  $-32x^2 + 116xy + 8x - 160y^2 - 4y - 1 = 0$  из точки  $(\frac{3}{11}, \frac{1}{11})$ .

касаются коники.

ОТВЕТ: а)  $(\frac{5}{14}, -\frac{1}{7})$ ; б)  $(1, \frac{2}{3})$ ; в)  $(\frac{3}{11}, \frac{1}{11})$

**ПК7♦8.** Напишите однородное уравнение проективной коники, проходящей через

- а) точки  $(-3 : -2 : 1), (16 : 9 : -6), (-3 : -3 : 1), (29 : 17 : -11), (-28 : -19 : 10)$

- б) точки  $(0 : 3 : 1)$ ,  $(-1 : 1 : 1)$ ,  $(-3 : 14 : 6)$  и касающейся прямой  $6x_0 - 6x_1 + 20x_2 = 0$  в точке  $(3 : -7 : -3)$ .
- в) точку  $(1 : 0 : 0)$  и касающейся прямых  $2x_0 + 12x_1 + 6x_2 = 0$  и  $2x_0 - 2x_2 = 0$  соответственно в точках  $(9 : -4 : 5)$  и  $(1 : 0 : 1)$ .

ОТВЕТ: в (а)  $-21x_2^2 + 24x_0x_1x_2 - 4x_1^2x_2 - 4x_1x_2^2 - 4x_2^3 = 0$ , в (б)  $8x_2^3 + 12x_0x_1x_2 + 4x_0x_2^2 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_2^3 = 0$ , в (в)  $4x_0x_1^2 + 4x_0x_2^2 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - 4x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2^3 = 0$ .

**ПК7♦9.** В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  определите типы гладких евклидовых коник и для центральных коник найдите центры и направления главных осей, а для парабол — направление оси и вершину.

- а)  $20x^2 + 52xy - 20x + 34y^2 - 24y + 9 = 0$   
 б)  $-16x^2 - 76xy - 8x - 90y^2 - 20y - 1 = 0$   
 в)  $-7x^2 + 20xy + 2x - 14y^2 - 4y = 0$   
 г)  $20x^2 - 52xy + 32x + 34y^2 - 40y + 15 = 0$   
 д)  $-x^2 - 4xy - 6x - 4y^2 - 8y + 3 = 0$   
 е)  $-4x^2 - 12xy - 4x - 9y^2 - 8y + 4 = 0$ .

ОТВЕТ: в (а) эллипс с центром  $(7, -5)$  и осями вдоль векторов  $\left(-\frac{26}{7} + \frac{26}{5\sqrt{29}}, \frac{26}{7}\right)$  и  $\left(\frac{26}{5\sqrt{29}}, \frac{26}{7}\right)$ ; в (б) гиперболы с центром  $(-5, 2)$  и осями вдоль векторов  $\left(-\frac{38}{37} + \frac{38}{\sqrt{2813}}, \frac{38}{37}\right)$  и  $\left(\frac{38}{\sqrt{2813}}, \frac{38}{37}\right)$ ; в (в) гиперболы с центром  $(3, 2)$  и осями вдоль векторов  $\left(\frac{20}{7} + \frac{20}{\sqrt{449}}, \frac{20}{7}\right)$  и  $\left(\frac{20}{\sqrt{449}}, \frac{20}{7}\right)$ ; в (г) эллипс с центром  $(-6, -4)$  и осями вдоль векторов  $\left(\frac{26}{7} + \frac{26}{5\sqrt{29}}, \frac{26}{7}\right)$  и  $\left(\frac{26}{5\sqrt{29}}, \frac{26}{7}\right)$ ; в (д) параболы с осью  $(-4, -2)$  и вершиной  $\left(\frac{87}{25}, -\frac{25}{7}\right)$ ; в (е) параболы с осью  $(-4, -6)$  и вершиной  $\left(-\frac{169}{731}, \frac{169}{418}\right)$ .

**ПК7♦10.** В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  определите тип, укажите начальную точку и направления координатных осей канонического ортонормального репера и напишите в нём уравнение квадрики, заданной в стандартном ортонормальном базисе уравнением

- а)  $14x^2 + 4xy - 8xz - 48x + 17y^2 + 4yz - 12y + 14z^2 + 96z = -162$   
 б)  $5x^2 - 4xy - 4xz + 18x + 2y^2 - 8yz + 2z^2 = -3$   
 в)  $-19x^2 + 28xy - 56xz + 150x + 2y^2 + 28yz - 48y - 19z^2 + 150z = 180$   
 г)  $11x^2 - 20xy + 4xz - 60x + 14y^2 + 16yz + 30y + 20z^2 + 21z = -18$   
 д)  $4x^2 + 8xy - 12xz - 14x - 4yz + 8y + 5z^2 + 26z = 27$   
 е)  $4x^2 - 28xy + 4xz - 12x + 13y^2 - 32yz - 48y + 19z^2 + 66z = -63$

ОТВЕТ: в (а) эллипсоид  $\frac{x^2}{3} + x^2 + x^2 = 1$  в ортонормальном репере с началом в точке  $(2/3, 2/3, -10/3)$  и осями, направленными вдоль векторов  $e_1 = (2/3, -1/3, 2/3)$ ,  $e_2 = (-1/3, 2/3, 2/3)$ ,  $e_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)$ . в (б) связный гиперболический параболоид  $x^2 + x^2 - \frac{z^2}{2} = 1$  в ортонормальном репере с началом в точке  $(-1, 1, 1)$  и осями, направленными вдоль векторов  $e_1 = (2/3, 2/3, 1/3)$ ,  $e_2 = (2/3, 1/3, -2/3)$ ,  $e_3 = (-1/3, -2/3, -2/3)$ . в (в) несвязный гиперболический параболоид  $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - 3x^2 = -1$  в ортонормальном репере с началом в точке  $(1, -2, 1)$  и осями, направленными вдоль векторов  $e_1 = (1/3, -2/3, -2/3)$ ,  $e_2 = (2/3, 2/3, -1/3)$ ,  $e_3 = (2/3, -1/3, 2/3)$ . в (г) эллиптический параболоид  $3x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 0$  в ортонормальном репере с началом в точке  $(1/3, -5/3, 1/3)$  и осями, направленными вдоль векторов  $e_1 = (-2/3, -2/3, 1/3)$ ,  $e_2 = (-2/3, 1/3, -2/3)$ ,  $e_3 = (-2/3, 2/3, -2/3)$ . в (д) конус  $2x^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 0$  в ортонормальном репере с началом в точке  $(1/3, -2/3, -7/3)$  и осями, направленными вдоль векторов  $e_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$ ,  $e_2 = (-2/3, 1/3, -2/3)$ ,  $e_3 = (2/3, 2/3, 1/3)$ .