Квадрики

ГЛ11⋄1*. На гладкой конике C задана точка $p \in C$. Одной линейкой постройте касательную прямую T_pC

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, которое вложим в качестве аффинной карты U_0 в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ называется *бесконечностью* и обозначается $\ell_\infty = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точки $\iota_\pm \overset{\text{def}}{=} (\pm i : 1) \in \ell_\infty$, из которых состоит евклидова коника $x_1^2 + x_2^2 = 0$, называются *изотропными направлениями*. На ℓ_∞ имеется инволюция *перпендикулярности*[1] (её неподвижные точки — изотропные направления). Коника на $\mathbb{P}_2$ называется *вещественной*, если её уравнение в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется, соответственно, *параболой*, *гиперболой*, *эллипсом*, если она касается бесконечности ℓ_∞ или пересекает её по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точки пересечения $C \cap \ell_\infty$ называются *асимптотическими направлениями* коники C. Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой вещественной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если прямые $(f\iota_\pm)$ касаются C. Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс z_* бесконечно удалённой прямой ℓ_∞ называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Гладкие коники C с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральными*. Такая коника C задаёт на прямой ℓ_∞ инволюцию *сопряжённия коникой C* (её неподвижные точки — асимптотические направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* гладкой центральной коники.

ГЛ11⋄2*. Покажите, что ГМТ с фиксированной суммой σ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является эллипсом, напишите его каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГЛ11⋄3*. Покажите, что ГМТ с фиксированной абсолютной величиной разности ϱ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является гиперболой, напишите её каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГЛ11⋄4*. Покажите, что ГМТ с фиксированным отношением $\varepsilon > 0$ расстояния до данной точки f к расстоянию до данной прямой $\ell \not\ni f$ является коникой[2], определите её тип в зависимости от ε и напишите её каноническое уравнение.

ГЛ11⋄5* (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых гладкая центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная с C окружность[3].

ГЛ11⋄6*. На сторонах заданного угла bac откладывают точки $s \in [a, b)$ и $t \in [a, c)$ с фиксированной суммой расстояний до вершины $|s-a|+|a-t| = \sigma$. Покажите, что все прямые (st) касаются некоторой параболы.

ГЛ11⋄7*. Опущенные из точки c касательные к параболе пересекают её в точках $a \neq b$. Покажите, что соединяющая середины отрезков $[a, c]$ и $[b, c]$ прямая касается параболы.

ГЛ11⋄8*. Покажите, что все хорды гладкой коники C на евклидовой плоскости, видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q, причём прямая (pq) перпендикулярна касательной T_pC.

ГЛ11⋄9*. Покажите, что точки, симметричные фокусу параболы относительно всевозможных касательных, лежат на её директрисе.

ГЛ11⋄10*. Убедитесь, что центральная коника C имеет четыре фокуса, два из которых (назовём их f_1, f_2) вещественны, а два других (назовём их f_3, f_4) не вещественны и комплексно сопряжены, причём прямые (f_1f_2) и (f_3f_4) пересекаются в центре z_* коники и пересекают

[1] Переводящая одномерное подпространство в V в евклидово перпендикулярное одномерное подпространство.

[2] Число ε называется *эксцентриситетом* этой коники.

[3] Она называется *директором* коники C.

бесконечность ℓ_∞ по вещественным точкам x_* и y_*, задающим направления главных осей коники C. Кроме того, точки x_* и y_* являются полюсами фокальных прямых (f_3f_4) и (f_1f_2) соответственно, а треугольник $\triangle\, x_*y_*z_*$ автополярен относительно C, см. рис. 1⋄1. Верно ли, что поляры изотропных точек $\iota_\pm$ тоже пересекаются в центре коники?

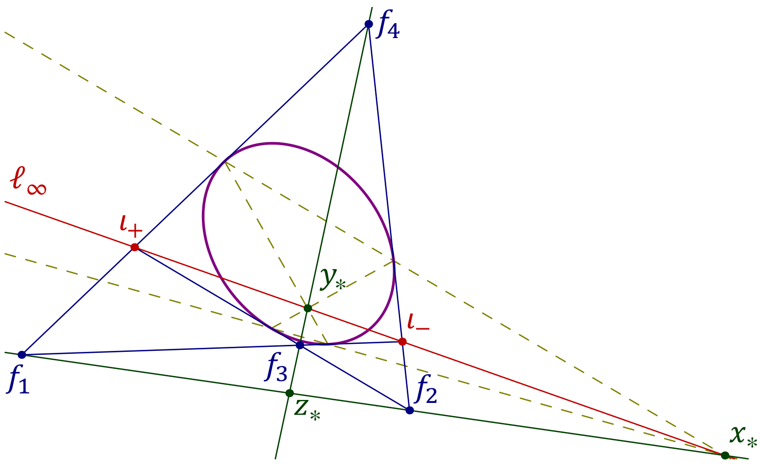

Рис. 1⋄1. Гладкая центральная коника (эллипс или гипербола).

ГЛ11⋄11*. Сформулируйте и решите аналог зад. ГЛ11⋄10 для параболы: сколько у параболы фокусов, директрис, кто такие главные оси, и как всё это располагается, см. рис. 1⋄2

ГЛ11⋄12*. Дайте определение оси параболы и покажите, что в конечной точке ось пересекает параболу под прямым углом, а касательные, восстановленные в концах любой проходящей через фокус хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

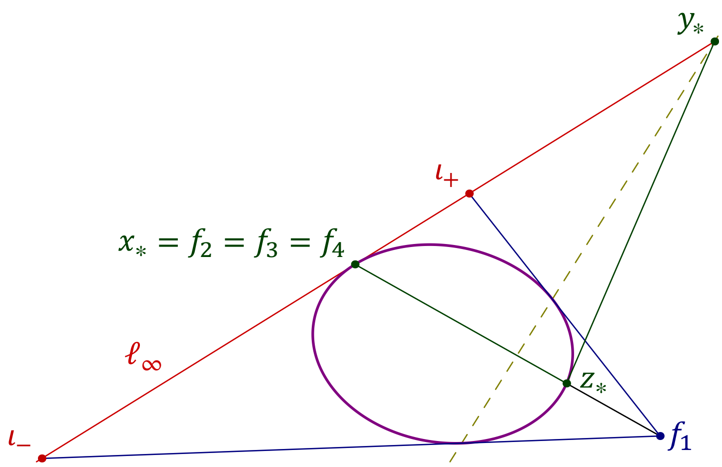

Рис. 1⋄2. Парабола.

ГЛ11⋄13*. Покажите, что однополостный гиперболоид $1 + z^2 = x^2 + y^2$ в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфен $\mathbb{R}^1 \times S^1$.

ГЛ11⋄14*. Покажите, что проекция непустой гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $\Gamma \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию[4] между дополнением $Q \smallsetminus T_pQ$ и аффинным пространством[5] $\Gamma \smallsetminus T_pQ \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

ГЛ11⋄15*. Покажите, что гладкие 0-планарная и 1-планарная квадрики в $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{F}_q$ состоят, соответственно, из $q^2 + 1$ и $(q+1)^2$ точек.

ГЛ11⋄16*. Из скольких точек состоит квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \alpha\, x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$ над полем[6] $\mathbb{F}_9$ в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{F}_9$?

[4]Соответствие между проективными многообразиями называется *бирациональным*, если однородные координаты соответствующих друг другу точек являются рациональными функциями друг друга.

[5]Заодно убедитесь, что $\Gamma \smallsetminus T_pQ$ это действительно $\mathbb{A}^{n-1}$.

[6]Поле $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ состоит из чисел вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ и $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$.