

Коники

ГС17♦1. Могут ли все коники в пучке над \mathbb{C} быть вырожденными? Пусть в пучке есть хоть одна гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденные коники? Если да, приведите явный пример такого пучка, если нет, объясните, почему.

ГС17♦2. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 е) 5 точкам? Если да, приведите явные примеры таких коник, если нет, объясните, почему.

ГС17♦3. Может ли пучок коник содержать ровно одну особую конику, не являющуюся двойной прямой? Если да, напишите явное однопараметрическое уравнение коник такого пучка, если нет, объясните, почему.

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость $V = \mathbb{R}^2$ со стандартными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек комплексного координатного пространства $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, которое вложим в качестве аффинной карты U_0 в комплексную проективную плоскость $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ на \mathbb{P}_2 называется *бесконечностью* и обозначается $\ell_{\infty} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}})$. Точки $l_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (\pm i : 1) \in \ell_{\infty}$, из которых состоит евклидова коника $x_1^2 + x_2^2 = 0$, называются *изотропными направлениями*. На ℓ_{∞} имеется инволюция *перпендикулярности*¹ (её неподвижные точки — изотропные направления). Коника на \mathbb{P}_2 называется *вещественной*, если её уравнение в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется, соответственно, *параболой*, *гиперболой*, *эллипсом*, если она касается бесконечности ℓ_{∞} или пересекает её по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точки пересечения $C \cap \ell_{\infty}$ называются *асимптотическими направлениями* коники C . Точка $f \in \mathbb{P}_2$ называется *фокусом* гладкой вещественной коники $C \subset \mathbb{P}_2$, если прямые (fl_{\pm}) касаются C . Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс z_* бесконечно удалённой прямой ℓ_{∞} называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Гладкие коники C с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральными*. Такая коника C задаёт на прямой ℓ_{∞} инволюцию *сопряжённости коникой C* (её неподвижные точки — асимптотические направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* гладкой центральной коники.

ГС17♦4. Парабола в евклидовом \mathbb{R}^2 пересекает гиперболу $xy = 1$ в точке $(2, 1/2)$, и это их единственная точка пересечения на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$. Напишите уравнение параболы и найдите её фокус и директрису.

ГС17♦5. Покажите, что перпендикулярность вещественных векторов $u, w \in \ell_{\infty}$ равносильна
 а) их сопряжённости относительно евклидовой коники $x_1^2 + x_2^2 = 0$
 б) гармоничности их направлений с изотропными направлениями l_{\pm} .

ГС17♦6. Покажите, что ГМТ с фиксированной суммой σ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является эллипсом, напишите его каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС17♦7. Покажите, что ГМТ с фиксированной абсолютной величиной разности ρ расстояний до двух данных точек f_1, f_2 является гиперболой, напишите её каноническое уравнение и найдите фокусы и директрисы.

ГС17♦8. Покажите, что ГМТ с фиксированным отношением $\varepsilon > 0$ расстояния до данной точки f к расстоянию до данной прямой $l \not\ni f$ является коникой², определите её тип в зависимости от ε и напишите её каноническое уравнение.

ГС17♦9. Убедитесь, что центральная коника C имеет четыре фокуса, два из которых (назовём их f_1, f_2) вещественны, а два других (назовём их f_3, f_4) не вещественны и комплексно сопряжены, причём прямые (f_1f_2) и (f_3f_4) пересекаются в центре z_* коники и пересекают бесконечность ℓ_{∞} по вещественным точкам x_* и y_* , задающим направления главных осей

¹Переводящая одномерное подпространство в V в евклидово перпендикулярное одномерное подпространство.

²Число ε называется *эксцентриситетом* этой коники.

коника C . Кроме того, точки x_* и y_* являются полюсами фокальных прямых (f_3f_4) и (f_1f_2) соответственно, а треугольник $\Delta x_*y_*z_*$ автополярен относительно C , см. рис. 1◊1. Верно ли, что поляры изотропных точек l_{\pm} тоже пересекаются в центре коники?

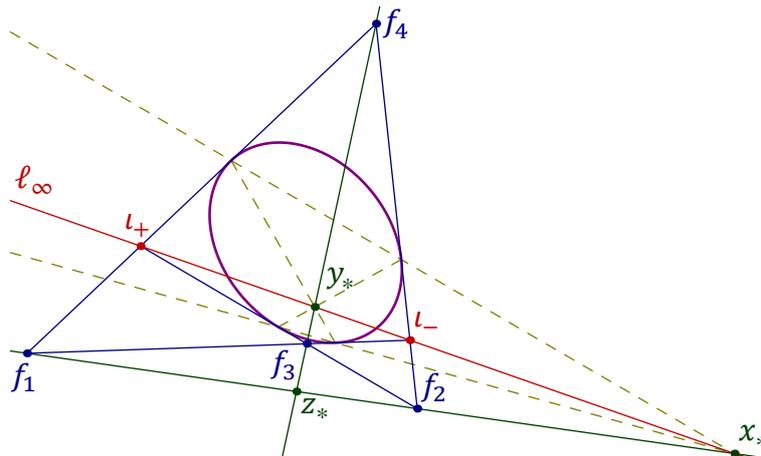


Рис. 1◊1. Гладкая центральная коника (эллипс или гипербола).

ГС17◊10. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

ГС17◊11 (окружности). Для гладкой непустой вещественной коники C докажите равносильность свойств: а) C проходит через l_{\pm} б) C центральна и имеет более одной пары главных осей в) C центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

ГС17◊12. Сформулируйте и решите аналог зад. ГС17◊9 для параболы: сколько у параболы фокусов, директрис, кто такие главные оси, и как всё это располагается, см. рис. 1◊2

ГС17◊13. Дайте определение оси параболы и покажите, что в конечной точке ось пересекает параболу под прямым углом, а касательные, восстановленные в концах любой проходящей через фокус хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

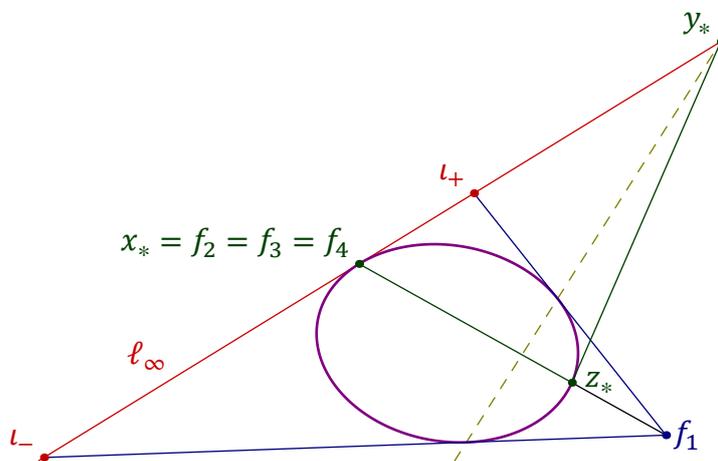


Рис. 1◊2. Парабола.

ГС17◊14. Найдите фокусы, директрисы, центр и асимптоты евклидовых коник

$$2ax = y^2, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \tag{1}$$

где, соответственно, $a > 0$, $a > b > 0$ и $a, b > 0$.

ГС17◊15. На евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 опишите ГМТ пересечения всевозможных пар перпендикулярных касательных к трём коникам из зад. ГС17◊14.

ГС17◊16. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ выясните тип коники $x^2 + y^2 + 1 = \lambda(2x - x^2 - 2y^2 - 2xy)$ и опишите геометрическое место центров всех центральных коник этого пучка.

ГС17♦17. Уравнения (1) называются *каноническими* для параболы, эллипса и гиперболы. Покажите, что отличная от окружности гладкая непустая вещественная коника задаётся каноническим уравнением в единственном с точностью до смены знаков базисных векторов ортонормальном аффинном репере. Найдите эти реперы и уравнения для коник

а) $19x^2 + 50xy + 28x + 33y^2 + 36y + 11 = 0$ б) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 3 = 0$
в) $7x^2 - 8xy + 8x + 2y^2 - 4y + 3 = 0$ г) $10x^2 + 26xy - 2x + 17y^2 - 4y + 4 = 0$
д) $-6x^2 - 28xy - 32y^2 - 4y + 5 = 0$ е) $x^2 + 2xy + y^2 + 2y = 3$

ГС17♦18. Опишите ГМТ, делящих в заданном отношении α все параллельные заданной прямой хорды данной окружности.

ГС17♦19. Опишите ГМТ — середин пучка параллельных хорд данного эллипса.