Теория вероятностей 2024. Задачи 1.

1. Имеются две одинаковые монеты. На одной стороне каждой из них написан 0, а на другой 1. Монеты подбросили и посчитали сумму выпавших очков. Затем повторили бросок. Какова вероятность, что получилась такая же сумма очков, если

   (a) монеты различимы? (b) монеты неразличимы?

2. Вместе с другими студентами вы сдаете экзамен. Число студентов равно числу билетов и составляет n. Известно, что среди билетов имеется $1 \leq k \leq n$ простых. Студенты заходят в аудиторию по очереди, тянут билет и оставляют его себе. Когда вам выгоднее всего зайти, чтобы максимизировать вероятность вытянуть простой билет? Чтобы разобраться в этом животрепещущем вопросе, вычислите вероятность вытянуть простой билет, если вы заходите

   (a) первым; (b) j-ым, $1 \leq j \leq n$.

3. Рассматривается случайное размещение n неразличимых частиц по M различимым ячейкам. Вычислите вероятность $Q_k(n; M)$ того, что в фиксированной ячейке содержится k частиц.

   Найдите предел $Q_k(n; M)$, когда $n, M \to \infty$ таким образом, что $n/M \to \lambda$, где $\lambda > 0$ фиксировано.

4. Имеется код длины n, состоящий из цифр от 0 до 9. Найти вероятность того, что цифры расположены в неубывающем порядке.

5. Из колоды (52 карты) вынимают 4 карты.

   (a) Какова вероятность, что все 4 карты — пики?

   (b) Какова вероятность, что 3 карты — пики, а одна — черви ?

6. Имеется три пронумерованных ящика (1,2,3), по ним случайным образом разложены 10 неразличимых белых шаров и 4 пронумерованных красных шара (1,2,3,4). Найдите вероятность того, что в каждом ящике есть хотя бы один белый шар и хотя бы один красный шар с номером, большим номера ящика.

7. Имеется три ящика, в них случайным образом лежат три черных и три белых шара. Найдите вероятность того, что в первом ящике лежит не менее двух черных шаров, а в третьем — не более одного белого, если

   (a) шары пронумерованы (b) шары отличаются только цветом.

8. Имеется ящик с 30 различимыми шарами, среди которых 10 красных и 20 черных шаров. Наугад вынимают 12 (без учета порядка и без возвращения). Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров оказалось поровну красных и черных. Что изменится, если учитывать порядок?

9. Так работает (одномерная) линия передачи сотовой сети. n антенн выстроены в линию на равном расстоянии, каждая повторяет сигнал, полученный от соседней антенны. Сигнал может преодолевать расстояние двух антенн, поэтому передача работает, если нет двух последовательных неисправных антенн. Предположим, что $m < n$ антенн неисправны, но мы не знаем их положения. Какова вероятность того, что трансмиссия сработает?

10. Электричка состоит из n вагонов. Каждый из k пассажиров выбирает вагон наудачу. Какова вероятность, что в каждом вагоне будет хотя бы один пассажир? Какова вероятность, что будут заняты ровно r вагонов?

11. Пассажиры в автобусе рассаживаются случайным образом, не обращая внимания на места, указанные в билете. Число пассажиров равно числу мест. Какова вероятность, что ни один не сядет на свое место?

12. * Человек одновременно купил две коробки спичек и положил их в карман. После этого каждый раз, когда ему нужно было зажечь спичку, он доставал наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время, вытащив одну из коробок, человек обнаружил, что она пуста. Какова вероятность, что в другой коробке в этот момент находилось k спичек, если число спичек в новой коробке равно n? [1]

13. * По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 3$, выбираются числа ξ и η. Покажите, что

$$\mathbb{P}\{\xi^2 - \eta^2 \text{ кратно } 2\} < \mathbb{P}\{\xi^2 - \eta^2 \text{ кратно } 3\}.$$

14. * По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 4$, выбираются числа ξ и η. Что больше, $\mathbb{P}\{\xi^3 + \eta^3 \text{ кратно } 3\}$ или $\mathbb{P}\{\xi^3 + \eta^3 \text{ кратно } 7\}$?

15. * По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$ выбираются числа ξ и η. Найти вероятность q_N того, что ξ и η взаимно просты. Найти $\lim_{N\to\infty} q_N$.

[1] Классический анекдот к этой задаче состоит в том, что этот человек — Банах, у него в каждой руке по бутылке водки, и он пьет из них беспорядочно.