Семинар 1

Векторные пространства, линейная зависимость. Линейная оболочка и ранг семейства векторов

1. Можно ли задать структуру векторного пространства
а) на множестве, состоящем из двух элементов;
б) на абелевой группе целых чисел.

2. Пусть семейство векторов $f_1, \ldots, f_k$ линейно независимо, а расширенное семейство $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}$ – линейно зависимо. Доказать, что вектор f_{k+1} линейно выражается через остальные, и это разложение единственно.

3. Если рассматривать вещественные числа как векторное пространство над рациональными, то семейство векторов $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ линейно независимо. Доказать.

4. Исследовать на линейную зависимость систему функций $2^{a_1 x}, 2^{a_2 x}, \ldots, 2^{a_n x}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.

5. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c, чтобы векторы $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$ были линейно зависимы?

6. В арифметическом векторном пространстве $\mathbb{Q}^n$ рассмотрим семейство целочисленных векторов. Доказать, что если это семейство линейно независимо по модулю простого числа p (это как?), то оно линейно независимо и в $\mathbb{Q}^n$.

7. Лежит ли вектор $(1, 2, 3)$ в линейной оболочке семейства векторов $(1, 1.1), (1, 0, -1), (1, 3, 5)$ из $\mathbb{R}^3$?

8. Найти базис и размерность линейной оболочки семейства строк $(2, 1, 3, 1), (1, 2, 0, 1), (-1, 1, -3, 0)$.

9. В семействе строк $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3), (5, -3, -1, 8), (3, 8, -9, -5)$ найти (какое-нибудь) максимальное линейно-независимое подсемейство (базис) и координаты остальных векторов в этом базисе.

10. В вещественном векторном пространстве размерности n рассмотрим семейство векторов $e_1, \ldots, e_{n+1}$, обладающее следующими свойствами:
а) сумма всех векторов семейства равна 0;
б) каждое подсемейство, полученное выбрасыванием одного из них, будет базисом пространства.

Доказать,что
1) любой вектор пространства однозначно записывается в виде $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_{n+1} e_{n+1}$, $a_1 + \ldots + a_{n+1} = 0$ (здесь вещественность не нужна);
2)* любой вектор пространства записывается в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами в одном из базисов пункта б).