

Семинарский листок 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

**Счётные и несчётные множества, иррациональные числа, упорядоченные поля,
аксиома Архимеда, ограниченные множества, аксиома непрерывности**

1. Докажите, что множества целых и рациональных чисел счётны, а множество вещественных чисел континуально.

2. Докажите, что множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел несчётно.

3. Пусть E — счётное подмножество \mathbb{R} . Докажите, что найдётся число a такое, что пересечение множеств $E + a$ и E пусто.

4. Докажите, что всякое упорядоченное поле содержит бесконечное количество элементов.

5. Докажите, что на поле комплексных чисел нельзя ввести структуру упорядоченного поля.

6. Докажите, что существует число $\sqrt{2}$, то есть вещественное число, которое в квадрате даёт 2, и оно иррационально.

7. Найдите точные верхние и нижние грани следующих множеств:

$$(a) \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}; \quad (b) \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}; \quad (c) \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

8. Докажите, что теорема о существовании верхней грани эквивалентна аксиоме непрерывности. Иными словами, упорядоченное множество, у которого каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань есть \mathbb{R} .

9. Докажите архимедовость полей \mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и неархимедовость поля рациональных функций над \mathbb{R} с отношением порядка определённым на лекции.