Теория вероятностей 2024. Задачи 2.

1. 1) Верно ли равенство $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(C|A) = \mathbb{P}(B \cup C|A)$?
   2) Привести примеры, показывающие, что следующие равенства, вообще говоря, неверны:
   $a)$ $\mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|C)$
   $b)$ $\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) = 1$

2. Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и события $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ имеют положительные вероятности. Обозначим $\mathbb{P}_{H_i} := \mathbb{P}(\cdot|H_i)$, $i = 1, 2$. Докажите, что
   $$\mathbb{P}_{H_1}(\cdot|H_2) = \mathbb{P}(\cdot|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(\cdot|H_1).$$
   То есть, для любого $A \in \mathcal{F}$,
   $$\mathbb{P}_{H_1}(A|H_2) = \mathbb{P}(A|H_1 \cap H_2) = \mathbb{P}_{H_2}(A|H_1).$$

3. Колоду из 52 карт раздают на 4 игроков. Один из игрока объявляет, что у него есть туз.

   a) Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз?

   b) Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

   Сперва решите эту задачу напрямую, не используя понятие условной вероятности (переопределяя множество элементарных исходов), а затем по определению условной вероятности.

4. Из множества $\{1, 2, ..., n\}$ без возвращения по очереди выбирают три различных числа. Найдите условную вероятность того, что третье число лежит между первым и вторым, при условии, что первое число меньше второго.

5. (а) В мешке лежали один шар белого и один шар чёрного цвета. Из него извлекли один шар и положили в пустой ящик. Также в ящик положили ещё один белый шар. Наконец, из ящика извлекли один шар, он оказался белым. Какова вероятность того, что оставшийся в ящике шар тоже белый?

   (б) Решите предыдущую задачу в предположении, что исходно в мешке было 10 черных и 7 белых шаров.

6. *(Урновая схема Пойа)* В урне находятся a белых и b черных шаров. Выполняем n случайных извлечений и сразу после каждого извлечения шар возвращается в урну вместе с m других шарами того же цвета. ($m \geq -1$ и $n \leq a + b$ если $m = -1$).

   $a)$ Какова вероятность, что из $n = n_1 + n_2$ выбранных шаров белых шаров будет n_1, а черных n_2?

   $b)$ Докажите, что вероятность извлечь на i-м шаге белый шар равна $a/(a + b)$.

7. *(Парадокс Монти Холла)*. Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор? Уточнения: автомобиль равновероятно размещён за любой из трёх дверей; ведущий знает, где находится автомобиль; вне зависимости от того какую вы выбрали дверь, ведущий в любом случае обязан открыть дверь с козой (но не ту, которую вы выбрали) и предложить изменить выбор; если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть (то есть, вы указали на верную дверь, и за обеими оставшимися дверями — козы), он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью.

8. Ковид снова в моде! Но и британские учёные не спят: разработан новый тест, имеющий чувствительность 99% (т.е. верно диагностирует больного в 99% случаев) и специфичность 99% (лишь 1% здоровых людей объявляет больными). Известно, что в одной счастливой деревне ковидом страдает 1 человек из ее 1000 жителей. Какова вероятность того, что житель этой деревни, объявленный больным по результатам теста, действительно болен?

9. Агент Д. следит за передвижениями директора некоторой компании. Известно, что директор бывает в офисе с вероятностью 60%, а на даче с вероятностью 40%. У агента Д. есть два осведомителя, причем первый ошибается с вероятностью 20%, а второй - с вероятностью 10%. Первый осведомитель утверждает, что директор компании в офисе, а второй осведомитель утверждает, что он на даче. Где директор?