Домашнее задание 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Срок сдачи: 9 октября 23:59 по Московскому времени

Количество сданных задач равняется оценке за листок.

1. Докажите существование и иррациональность следующих чисел

$$(a)\ \sqrt{12}; \quad (b)\ 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}.$$

2. Докажите, что не существует такого счётного набора P числовых последовательностей, что для всякой последовательности чисел $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ найдётся последовательность $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$, для которой $x_n \leqslant p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

3. Докажите несчётность отрезка двумя способами: используя теорему о вложенных промежутках и не используя её.

4. Найти, при каких $a \in \mathbb{R}$ множество $\{a^n/n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено.

5. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ открыто, а $B \subset \mathbb{R}$ замкнуто. Докажите, что множество $A \setminus B$ открыто, а $B \setminus A$ замкнуто. Выведите отсюда, что множество открыто тогда и только тогда, когда дополнение к нему замкнуто и замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к нему открыто.

6. Докажите, что всякая система непересекающихся интервалов на прямой не более чем счётна.

7. Докажите, что интервал является связным.

8. Докажите, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \forall M \in \mathbb{N}\ \exists p, q \in \mathbb{N}, q > M, |\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant q^{-2}$. Иными словами, любое вещественное число приближается с точностью до q^{-2} бесконечным множеством рациональных чисел вида p/q.

9. Докажите, что для поля рациональных функций над $\mathbb{R}$ с отношением порядка, введённым на лекциях, не выполнена аксиома непрерывности, явно предъявив два множества, удовлетворяющих предположениям аксиомы непрерывности, но не удовлетворяющим её заключению.

10. Докажите, что из всякого набора интервалов на прямой можно выбрать конечный или счетный поднабор с тем же объединением.

11. Пусть упорядоченное поле $\mathbb{F}$ связно. Докажите, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то есть в $\mathbb{F}$ выполнена аксиома непрерывности.