Семинар 2

Базис. Размерность. Матрица перехода

1. Доказать, что векторы $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве строк $\mathbb{R}^3$. Найти координаты вектора $(6, 9, 14)$ в этом базисе.

2. Доказать, что в пространстве строк векторы, у которых первая и последняя координаты равны, образуют подпространство. Найти его размерность и указать базис. Те же вопросы про строки, у которых сумма координат равна 0.

3. Найти размерность и указать базис векторного пространства матриц $m \times n$.

4. В векторном пространстве вещественных многочленов степени ≤ 3 рассмотрим многочлены, для которых комплексное число i является корнем. Образуют ли такие многочлены подпространство? Если да, то найти его размерность и указать базис.

5. Доказать, что решения однородной системы линейных уравнений образуют векторное пространство. Найти его размерность и указать базис для системы с матрицей коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Доказать, что матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{smallmatrix}\right)$, образуют базис в пространстве квадратных вещественных матриц второго порядка. Найти координаты матрицы $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{smallmatrix}\right)$ в этом базисе.

7. В векторном пространстве вещественных многочленов степени ≤ 3 найти матрицу перехода от базиса $1, 1 + t, 1 + t^2, 1 + t^3$ к базису $1 + t^3, t + t^3, t^2 + t^3, t^3$.

8. Пусть T_1 матрица перехода от первого базиса ко второму, а T_2 – матрица перехода от второго базиса к третьему. Найти матрицу перехода от первого базиса к третьему.

9. Как изменится матрица перехода от первого базиса ко второму, если

1) поменять местами

а) i-й и j-й векторы первого базиса;

б) i-й и j-й векторы второго базиса;

2) переписать векторы обоих базисов в обратном порядке;

3) прибавить к i-тому вектору первого базиса его j-й вектор.

10. Доказать, что любое независимое семейство в векторном пространстве можно дополнить до базиса.