Семинар 3
Подпространства

1. Наименьшее (по включению) подпространство векторного пространства, содержащее данное семейство векторов, совпадает с их линейной оболочкой (доказать).

2. Если U и W – векторные пространства одинаковой размерности и $U \subset W$, то $U = W$ (доказать).

3. Если U и W – подпространства векторного пространства V, и каждый вектор из V лежит либо в U, либо в W, то или $U = V$, или $W = V$.

4. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис векторного пространства V. Доказать,что $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle \oplus \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle = V$.

5. В пространстве многочленов, степени которых не выше данной, четные и нечетные многочлены образуют подпространства, которые служат дополнениями друг к другу (доказать).

6. Всегда ли $L_1 \cap (L_2 + L_3) = (L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)$ для трех подпространств L_1, L_2, L_3 векторного пространства L? Доказать, что это так, если L_1 содержит L_2 или L_1 содержит L_3.

7. Найти базис суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2 в $\mathbb{R}^5$:
$L_1 = \langle (1,1,1,1,1), (1,-1,1,-1,1), (2,1,-1,1,2) \rangle, L_2 = \langle (-1,2,1,1,0), (1,0,4,0,1) \rangle$.

8. В векторном пространстве квадратных матриц порядка n заданы подпространство (?) симметричных матриц и подпространство (?) верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. Доказать,что пространство матриц есть прямая сумма этих подпространств и объяснить, как записать произвольную матрицу в виде суммы симметричной и верхнетреугольной матрицы с нулями на главной диагонали.

9. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и L – такое одномерное подпространство в V, что $L \cap V_1 = 0, L \cap V_2 = 0$. Найти размерность подпространства $(V_1 + L) \cap (V_2 + L)$ и указать какой-нибудь базис этого подпространства.

10*. Пусть L_1, L_2, L_3 – подпространства векторного пространства L, попарно пересекающиеся по нулевому вектору. Доказать,что размерность подпространства $(L_1 + L_2) \cap (L_2 + L_3) \cap (L_3 + L_1)$ четна.