Семинарский листок 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Натуральные числа, аксиома непрерывности, архимедовы поля, теорема о вложенных отрезках, открытые и замкнутые множества, связность

1. Докажите неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

при $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что равенство возможно тогда и только тогда, когда либо $n=1$, либо $x=0$.

2. Докажите, что последовательность вещественных чисел $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $|q|<1$, стремится к нулю.

3. Пусть F — упорядоченное поле, для которого выполнена аксиома Архимеда. Доказать, что для любого $x \in F$ последовательности $x_n = x/n, x_n = \frac{x}{2^n}$ стремятся к 0. Приведите пример неархимедова поля, для которого данное свойство не выполнено.

4. Пусть есть упорядоченное поле, удовлетворяющее следующим свойствам: на нём выполняются теорема о вложенных отрезках и аксиома Архимеда. Докажите, что это поле — $\mathbb{R}$.

5. Назовем множество *чудесным*, если оно одновременно и открыто и замкнуто. Докажите, что в $\mathbb{R}$ есть единственное чудесное непустое подмножество — всё $\mathbb{R}$. Покажите, что $\mathbb{R}$ связно.

6. Докажите, что в если в упорядоченном поле $\mathbb{F}$ есть единственное чудесное (см. предыдущую задачу) непустое подмножество (всё $\mathbb{F}$), то $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

7. Пусть $\mathbb{F}$ – упорядоченное поле такое, что любое объединение интервалов вида (a, x) с общим левым концом a – это или интервал (a, b), или луч $\{x \in \mathbb{F} \mid x > a\}$. Докажите, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то есть в $\mathbb{F}$ выполнена аксиома непрерывности.

8. Система множеств называется *центрированной*, если каждая её конечная подсистема имеет непустое пересечение. Докажите, что на отрезке каждая центрированная система из замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

9. Докажите, что упорядоченное поле рациональных функций не связно.