Прикладные методы анализа – 2024

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

Дельта-функция. Понятие дельта-функции возникло из желания физиков иметь функцию (назовем ее $\delta(x)$), которая обладала бы следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

для любого a и любой достаточно гладкой функции f, спадающей на обеих бесконечностях. В обычном понимании такой функции не существует. В самом деле, если бы такая $\delta(x)$ существовала, она обязана была бы равняться нулю везде кроме точки 0, но тогда интеграл был бы равен 0, а не $f(a)$.

Тем не менее, можно определить функцию, которая обладает желаемым свойством в некотором пределе. Рассмотрим, например, функцию

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } |x| > \varepsilon/2, \\ \varepsilon^{-1} & \text{если } |x| \leq \varepsilon/2. \end{cases}$$

При малом ε она равна 0 везде кроме малой окрестности нуля, но при этом площадь под ее графиком равна 1 при любом сколь угодно малом ε. Поэтому легко понять, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(\varepsilon)}(x)dx = f(0)$$

для любой непрерывной функции f, и, более общо,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(\varepsilon)}(x-a)dx = f(a).$$

Отсюда мы видим, что в некотором условном смысле

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta^{(\varepsilon)}(x),$$

но такого предела, конечно, нет. Эта “формула” дает лишь интуитивное представление о δ-функции как функции, равной 0 везде кроме сколь угодно малой окрестности нуля, но ее значение в этой окрестности возрастает с уменьшением ее размера. Другими словами, δ-функция везде равна 0 кроме 0, в 0 равна бесконечности, а интеграл от нее по всей прямой (и по любой окрестности нуля) равен 1. Так определенная функция часто называется еще δ-функцией Дирака. Физики прекрасно умеют работать с такими “определениями”, математически явно бессмысленными.

Совсем не обязательно брать в качестве “допредельной” функции $\delta^{(\varepsilon)}(x)$ разрывную функцию. В предыдущем примере это было сделано только для большей наглядности. Нетрудно видеть, что тем же свойством в пределе $\varepsilon \to 0$ обладают такие, например, гладкие функции:

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$$

или

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-x^2/\varepsilon}.$$

Коэффициенты выбраны так, что площадь под графиком этих функций равна 1.

Основное свойство δ-функции,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a),$$

имеет следующую замечательную интерпретацию: произвольная функция f есть непрерывная линейная комбинация сдвинутых δ-функций, сосредоточенных в точках x вещественной прямой, с коэффициентами $f(x)$, так что δ-функции образуют континуальный базис в пространстве функций на прямой. Полезно также понимать $\delta(x-a)$ как плотность единичной точечной массы или заряда, сосредоточенных в точке a.

Аналогично степенной функции, δ-функция обладает свойством однородности. Функция f называется однородной степени d, если $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ при любом положительном λ. Выясним, что такое $\delta(\lambda x)$. Имеем, делая замену переменной интегрирования $t = \lambda x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(\varepsilon)}(\lambda x - \lambda a)dx = \lambda^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t/\lambda)\delta^{(\varepsilon)}(t-\lambda a)dt.$$

Переходя к пределу, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\lambda(x-a))dx = \lambda^{-1} f(a),$$

откуда заключаем, что

$$\delta(\lambda x) = \lambda^{-1}\delta(x),$$

т.е. δ-функция однородна степени -1.

Обобщая этот пример, выясним, что такое $\delta(\phi(x))$, где $\phi(x)$ – монотонная функция. Пусть x_0 – ноль (единственный и простой) функции $\phi(x)$: $\phi(x_0) = 0$. Тогда рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что

$$\delta(\phi(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{\phi'(x_0)} = \frac{\delta(x-x_0)}{\phi'(x)}.$$

В некоторых случаях можно отказаться от требования монотонности. Например, если все нули функции $\phi(x)$ простые, можно показать, что

$$\delta(\phi(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|\phi'(x_j)|},$$

где суммирование ведется по всем нулям x_j функции $\phi(x)$.

Аналитическое представление δ-функции. Формулы Сохоцкого-Племеля для вещественной прямой могут быть прочитаны как следующие равенства обобщенных функций:

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \text{P.V.}\frac{1}{x} - \pi i\delta(x),$$

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = \text{P.V.}\,\frac{1}{x} + \pi i\delta(x).$$

Выразим из этих формул обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в смысле главного значения:

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon}\right),$$

$$\text{P.V.}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + i\epsilon} + \frac{1}{x - i\epsilon}\right).$$

Функция $\dfrac{1}{x + i\epsilon}$ есть предельное значение функции $\dfrac{1}{z}$, где $z = x + iy$ и $y \to +0$, функция же $\dfrac{1}{x - i\epsilon}$ есть предельное значение функции $\dfrac{1}{z}$, где $z = x + iy$ и $y \to -0$. Таким образом, приведенные выше формулы представляют обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в виде разности граничных значений функции, голоморфной в верхней полуплоскости и функции, голоморфной в нижней полуплоскости.

Производные δ-функции. Можно ли определить $\delta'(x)$, т.е. производную δ-функции? Воспользуемся правилом интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - a)dx = f(x)\delta(x - a)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x - a)dx.$$

Граничный член равен нулю, поскольку $\delta(x) = 0$ вне точки a, и мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - a)dx = -f'(a)$$

для любой функции f.

Аналогично могут быть определены высшие производные:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta''(x - a)dx = f''(a)$$

и, более общо,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(k)}(x - a)dx = (-1)^k f^{(k)}(a).$$

Для их определения нужно потребовать, чтобы функция f была достаточно гладкой.

Первообразная от δ-функции. Рассмотрим первообразную от δ-функции:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt.$$

Очевидно, это так называемая функция Хэвисайда ("ступенька"): $\theta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x > 0$. При $x = 0$ эта функция не определена. Часто бывает удобно доопределить ее условием $\theta(0) = \frac{1}{2}$. В отличие от δ-функции, это настоящая функция в обычном понимании, хотя и разрывная. Можно также прочесть вышеприведенное равенство в обратную сторону, что доставляет еще одно интуитивное понимание δ-функции:

$$\delta(x) = \theta'(x).$$

Многомерный случай. В n-мерном случае, когда $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор, δ-функцию можно определить как

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\ldots\delta(x_n),$$

поскольку соответствующее произведение δ-образных функций $\delta^{(\varepsilon)}$ дает δ-образную функцию в n-мерном пространстве. Так как сомножители однородны степени -1, произведение, очевидно, тоже однородно степени $-n$. В n-мерном пространстве основное свойство δ-функции записывается в виде

$$\int f(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{a})d^n x = f(\vec{a}),$$

где $d^n x = dx_1 \ldots dx_n$ – элемент объема. Интеграл в левой части берется по любой окрестности точки $\vec{a}$.

Более общие δ-образные функции. Аналогично δ-функции, в многомерном пространстве можно определить обобщенные функции, которые высаживают интеграл по всему объему на какое-то подмногообразие меньшей размерности. Например, если на комплексной z-плоскости задан контур Γ (будем считать, что он гладкий), можно определить обобщенную функцию $\delta_\Gamma(z)$ условием

$$\int\!\!\int_{\mathbb{C}} f(z)\delta_\Gamma(z)d^2 z = \int_\Gamma f(z)ds$$

для любой функции f на плоскости, где $d^2 z = dxdy$, ds – элемент длины вдоль контура.

Обобщенные функции: основные определения. Понятно, что δ-функция не есть функция в обычном понимании. Фактически она определяет некоторый функционал на пространстве гладких функций. Это замечание позволяет не только обобщить понятие функции, но и сделать их все бесконечно дифференцируемыми, используя формулу интегрирования по частям как определение. При этом, чтобы не мешали граничные члены, желательно выбрать функции, на которых заданы эти функционалы, достаточно быстро убывающими на бесконечности. Этими соображениями мотивировано следующее определение.

Определение. *Введем в рассмотрение множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция из этого множества принадлежит пространству*

1) *$\mathcal{D}$ основных функций (пространству финитных функций), если она финитна, т.е. обращается в ноль вне некоторого конечного интервала в $\mathbb{R}$;*

2) *$\mathcal{S}$ основных функций (пространству быстро убывающих функций), если при $|x| \to \infty$ она стремится к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой конечной степени $|x|$, т.е. при всех $|x|$ выполнены неравенства $|x^k f^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}$, $k, q = 0, 1, \ldots$*

Примеры:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(\dfrac{a^2}{x^2 - a^2}\Big), & \text{если } |x| < |a|, \\ \\ 0, & \text{если } |x| \geq |a|, \end{cases} \quad \in \mathcal{D}, \quad f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}.$$

Понятно, что оба пространства линейны. Зададим на них топологию согласно следующему определению.

Определение. *Будем говорить, что последовательность основных функций $f_1, f_2, \ldots$*

1) *сходится к нулю в пространстве $\mathcal{D}$, если все функции последовательности обращаются в ноль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю, как и их производные любого порядка;*

2) *сходится к функции $f(x)$ в пространстве $\mathcal{S}$, если в любой ограниченной области производная любого порядка от $f_n(x)$ равномерно сходится к соответствующей производной функции $f(x)$ и в оценках $|x^k f_n^{(q)}(x)| \leq C_{k,q}$, $k, q = 0, 1, \ldots$, постоянные $C_{k,q}$ можно выбрать не зависящими от n.*

Понятно, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ и плотно в нем.

Следующее определение является основным. Оно вводит обобщенные функции.

Определение. *Обобщенной функцией ϕ, заданной на соответствующем пространстве основных функций, называется линейный непрерывный функционал на этом пространстве. Иными словами, каждой основной функции $f(x)$ сопоставляется число, обозначаемое (f, ϕ), причем выполнены следующие условия:*

1) *для любых двух чисел a_1, a_2 и любых двух основных функций f_1, f_2 имеет место равенство $(a_1 f_1 + a_2 f_2, \phi) = a_1(f_1, \phi) + a_2(f_2, \phi)$ (линейность);*

2) *если последовательность основных функций $f_1, f_2, \ldots$ стремится к нулю, то последовательность чисел $(f_1, \phi), (f_2, \phi), \ldots$ сходится к нулю (непрерывность).*

Каждая функция $\phi(x)$, абсолютно интегрируемая в любой конечной области вещественной оси задает линейный функционал формулой

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

и тем самым определяет обобщенную функцию, которую можно отождествить с $\phi(x)$. Тем самым в пространстве обобщенных функций имеется подпространство, изоморфное пространству интегрируемых функций. Но в пространстве обобщенных функций есть и другие элементы, которые в таком интегральном виде не представляются. Например, функционал δ, определенный формулой

$$(f, \delta) = f(0).$$

Очевидно, он как раз соответствует δ-функции.

Равенство нулю обобщенной функции ϕ в окрестности U точки x_0 означает, что $(f, \phi) = 0$ для каждой основной функции f, отличной от нуля только внутри U. Обобщенная функция ϕ, отвечающая обычной функции $\phi(x)$, равна нулю в окрестности U точки x_0, если почти всюду в этой окрестности функция $\phi(x)$ обращается в нуль. Обобщенная функция $\delta(x - x_0)$ равна нулю в окрестности любой точки, отличной от x_0. Обобщенная функция ϕ равна нулю в открытой области G, если она равна нулю в окрестности каждой точки этой области. Обобщенные функции ϕ и ψ совпадают в открытой области G, если разность $\phi - \psi$ в этой области равна нулю. Если ϕ и ψ совпадают в окрестности каждой точки, то они совпадают в целом, т.е. $(f, \phi) = (f, \psi)$ для любой f. Обобщенная функция ϕ регулярна в области G, если в этой области она совпадает с некоторой обычной локально интегрируемой функцией.

Определение произведения обобщенных функций вообще говоря невозможно. Однако, если регулярная функция $a(x)$ такова, что для любой основной функции $f(x)$ произведение $a(x)f(x)$ также является основной функцией, то умножение обобщенной функции ϕ на такую регулярную функцию определяется формулой

$$(a\phi, f) = (\phi, af).$$

Это линейный (и при некоторых дополнительных условиях непрерывный) функционал на пространстве основных функций. Такая функция $a(x)$ называется мультипликатором. Для пространства $\mathcal{D}'$ (пространства функционалов на пространстве $\mathcal{D}$) мультипликаторами являются все бесконечно дифференцируемые функции.

Производная обобщенной функции ϕ – это линейный функционал, который обозначается ϕ' и определяется формулой

$$(\phi', f) = -(\phi, f').$$

Отметим, что согласно этому определению все обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Более подробно про обобщенные функции можно почитать в книгах [3, 4, 5].

Обобщенные функции комплексного переменного. Обобщенные функции комплексного переменного (на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) определяются по аналогии с обобщенными функциями на $\mathbb{R}$ и мы не будем на этом подробно останавливаться. Скажем только, что пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ определяются подобно случаю одной вещественной переменной с очевидным обобщением на случай двух вещественных переменных.

Мы будем пользоваться комплексными обозначениями $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$. При этом обозначение основной функции $f(z)$ не предполагает, что эта функция аналитическая, а является сокращенным обозначением для функции двух вещественных переменных. Мы будем также использовать стандартные обозначения

$$d^2z = dxdy,$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

и будем предполагать, что из курса анализа известна формула Грина-Остроградского, которая в комплексных обозначениях имеет вид

$$\int_{\mathsf{D}} \partial_{\bar{z}} f(z) d^2z = \frac{1}{2i} \oint_{\partial\mathsf{D}} f(z)dz.$$

Здесь D – область в комплексной плоскости. Важную роль играет также формула Коши-Грина:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{\mathsf{D}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

(здесь $\zeta = \xi + i\eta$ и предполагается, что $z \in \mathsf{D}$). Для доказательства исключим из D малый круг $\bar{U}_r$ с центром в z и к функции $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ в области $\mathsf{D}_r = \mathsf{D} \setminus \bar{U}_r$ применим формулу Грина-Остроградского в комплексной записи. Будем иметь:

$$\oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2i \int_{\mathsf{D}_r} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

Так как f непрерывна в z, во втором интеграле можно подставить $f(\zeta) = f(z)+O(r)$, где $O(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому

$$\oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z) + O(r)$$

и в пределе $r \to 0$ получаем формулу Коши-Грина.

Приведем примеры обобщенных функций комплексного переменного. Дельта-функция определяется условием

$$\int_{\mathbb{C}} \delta(z) f(z) d^2z = f(0)$$

для любой основной функции f, тогда, очевидно, $\delta(z) = \delta(x)\delta(y)$. Отметим, что для любого $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, выполняется $\delta(az) = |a|^{-2}\delta(z)$. Обобщенная функция $1/z^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) определяется как линейный функционал

$$\Big(\frac{1}{z^n}, f\Big) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z|>\epsilon} \frac{d^2z}{z^n}\, f(z).$$

С помощью формулы Коши-Грина можно доказать важные соотношения между обобщенными функциями комплексного переменного, например,

$$\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = \pi\delta(z), \qquad \Delta\log|z| = 2\pi\delta(z),$$

где $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ – оператор Лапласа.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.