Прикладные методы анализа – 2024
Листок 2

1. Докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int \delta^{(\varepsilon)}(x)f(x)dx = f(0)$ для любой бесконечно дифференцируемой функции f для следующих функций:

$$\text{а) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \text{б) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-x^2/\varepsilon}, \quad \text{в) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}.$$

2. Докажите, что в смысле обобщенных функций

$$x\delta(x) = 0, \ \text{ но } x\delta'(x) = -\delta(x) \neq 0.$$

3. Для любой регулярной функции $a(x)$ докажите тождество

$$a(x)\delta'(x) = a(0)\delta'(x) - a'(0)\delta(x).$$

4. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция с простыми нулями в точках x_i. Определим обобщенную функцию $\delta(f)$ равенством

$$(\delta(f),\varphi) = \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon^{-1}\int\limits_{0<f(x)<\epsilon}\varphi(x)dx$$

для любой основной функции φ. Покажите, что

$$\delta(f) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

5. а) Покажите, что $\theta'(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций;
б) Пусть функция f дифференцируема во всех точках кроме точки x_0, где имеет разрыв $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$. Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0),$$

где $\{f'(x)\} = f'(x)$ при $x \neq x_0$ и $\{f'(x)\} = 0$ при $x = x_0$.

6. а) Определим обобщенные функции $1/x$ и $1/x^2$ равенствами

$$\left(\frac{1}{x},\, f\right) = \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx, \qquad \left(\frac{1}{x^2},\, f\right) = \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}\,dx$$

для любой основной функции f. Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

б) Определите обобщенную функцию $1/x^3$.

7. Пусть $\varphi(x,y)$ – антисимметричная дифференцируемая функция, $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$. Докажите тождество

$$\delta'(x-y)\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\,\delta(x-y)(\partial_y - \partial_x)\varphi(x,y).$$

8. Докажите тождество

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x-n).$$

9. В $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$ докажите тождества

$$\text{а)}\ \ \partial_{\bar z}\Big(\frac{1}{z}\Big) = \pi\delta(z); \qquad \text{б)}\ \ \Delta \log|z| = 2\pi\delta(z),$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ – оператор Лапласа; в) найдите $\partial_{\bar z}\Big(\dfrac{1}{z^2}\Big)$.

10. В $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$ докажите тождества

$$\text{а)}\ \ \partial_{\bar z}\log z = -\pi\delta(y)\theta(-x); \qquad \text{б)}\ \ \partial_z \log z = \frac{1}{z} + \pi\delta(y)\theta(-x),$$

где $\log z$ – однозначная голоморфная ветвь логарифма в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ такая, что $\log x \in \mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}_+$.